AM2: Tracce delle lezioni- V Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una funzione reale di n variabili reali é una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ n volte (insieme delle n-uple ordinate di numeri reali $v = (x_1, \ldots, x_n)$; v si dice **punto o vettore** di $\mathbf{R}^n$) e a valori in $\mathbf{R}$.

Ad esempio, $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ (funzione lineare).

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$.

(**addizione**) Se $v = (y_1, \ldots, y_n)$ $\quad u + v := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

(**moltiplicazione per uno scalare**) Se $t \in \mathbf{R}$ $\quad tu := (tx_1, \ldots, tx_n)$

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy.

In tale piano, dato v, l'insieme $\mathbf{R}\, v := \{tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0,0)$ e passante per v; $\{tv + u : \ t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\, v$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

PRODOTTO SCALARE Siano $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$.

$< u, v > := x_1\, y_1 + \ldots + x_n y_n$ é il prodotto scalare tra u e v. Proprietá

positivitá $0 \le < u, u > \ \forall u \in \mathbf{R}^n$

simmetria $< u, v > = < v, u > \ \forall u, v \in \mathbf{R}^n$

bilinearitá $< au + bv, h > = a < u, h > + b < v, h > \ \forall a, b \in \mathbf{R}$

STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$.

$$\|u\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{< u, u >} \qquad (\textbf{norma di } u)$$

Se u, $v \in \mathbf{R}^n$ é $\quad d(u, v) := \|u - v\|$ $\quad$ (**distanza** tra u, v.)

Interpretazione geometrica. In $\mathbf{R}^2$, $\|u\| := \sqrt{x^2+y^2}$ é la lunghezza del segmento (o lunghezza del vettore u) che unisce il punto $u = (x, y)$ all'origine , e $d(u, v)$ é la distanza tra i punti u e v. Analoga interpretazione geometrica in $\mathbf{R}^n$.

CAUCHY-SCHWARTZ $\quad | < u,v > | \;\leq\; ||u||\,||v|| \qquad \forall u,v \in \mathbf{R}^n$. Infatti, $\quad 0 \leq \, < u+tv, u+tv > =$

$= \; ||u||^2 \; + 2t \; < u,v > \; + t^2 ||v||^2 \;\; \forall t \;\; \Rightarrow \; < u,v >^2 \; - ||u||^2 \, ||v||^2 \; \leq \; 0$

Proprietá della norma

$(i) \quad ||tu|| = |t|\,||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2, \;\; t \in \mathbf{R}$ (**positiva omogeneitá**)

$(ii) \quad ||u+v|| \leq ||u|| + ||v|| \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^2$ (**diseguaglianza triangolare**)

La (i) é ovvia, mentre (ii) segue dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\|u+v\|^2 \;=\; \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u,v > \;\;\leq\;\; \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| \;=\; (\|u\| + \|v\|)^2$$

Proprietá della distanza

$(i) \quad 0 \leq d(u,v), \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
$(ii) \quad d(u,v) \;=\; d(v,u) \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
$(iii) \quad d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \;\; \forall u,v,w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

NOTAZIONE. $\quad D := \{u : \;\; ||u|| < 1\}$, e, se $r > 0, \;\; v \in \mathbf{R}^n$:

$$D_r := rD := \{ru : u \in D\} = \{u : ||u|| < r\}, \;\; D_r(v) := D_r + v := \{u+v : u \in D_r\}$$

D_r é disco di raggio r centrato in zero, $D_r(v)$ é disco di raggio r centrato in v.

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}, \;\; A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{D}_r(u) = D_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f \;=\; l \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall \epsilon > 0, \;\; \exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\; \Rightarrow \;\; |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f \;=\; +\infty \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall M > 0, \;\; \exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\; \Rightarrow \;\; f(u) \geq \; M)$$

Se $\;D'_r \cap A\;$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \;=\; l \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall \epsilon > 0, \;\; \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \;\; u \in A, \;\; ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \;=\; +\infty \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall M > 0, \;\; \exists R_M > 0 : \;\; u \in A, \;\; ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq \; M)$$

SUCCESSIONI CONVERGENTI in $\mathbf{R}^n$ $\quad u_k \to_k u \quad \Leftrightarrow \quad ||u_k - u|| \to_k 0$

NOTA. (i) Se $u_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$, $u = (x_1, \dots, x_n)$, allora $u_k \to u \quad \Leftrightarrow \quad x_{k,1} \to_k x_1, \dots, \quad x_{k,n} \to_k x_n$.

Infatti $\qquad ||u_k - u||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2$

(ii) $\quad u_k \to u \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon : u_k \in D_\epsilon(u) \quad \forall k \geq k_\epsilon$

(iii) $\quad u_k$ converge $\Rightarrow \quad \sup_k \; ||u_k|| < +\infty$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\quad \Leftrightarrow$

$$u_n \in A, \; u_n \neq u_0, \; u_n \to u_0 \quad (|u_n| \to +\infty) \;\Rightarrow\; f(u_n) \to l$$

(ii) (**Cauchy**) f ha limite l per u tendente a u_0 $\quad \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists R_\epsilon > 0 : \quad u, v \in A, \; |u|, |v| \geq R_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \leq \epsilon$$

ESEMPI . **(i)** Sia $\quad f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \, |y|^\beta}{x^2+y^2}$ $\quad$ se $\; x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \; \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim\limits_{u \to 0} f(u)$ esiste se e solo se $\alpha + \beta > 2$ (e in tal caso vale zero).

Infatti, se $\alpha + \beta < 2$, allora $t_n \to_n 0 \;\Rightarrow\; f(t_n x, t_n y) = |t_n|^{\alpha+\beta-2} f(x,y) \to +\infty$ se $xy \neq 0$ mentre $f(t_n x, t_n y) \equiv 0$ se $xy = 0$. Se $\alpha + \beta = 2$, $f(t_n x, t_n y) \equiv f(x,y)$.
Se $\alpha + \beta > 2$, $\quad f(x,y) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} \to 0$ se $x^2 + y^2 \to 0$.

Viceversa, $\lim\limits_{|u| \to +\infty} f(u)$ esiste (ed in tal caso vale zero) se e solo se $\alpha + \beta < 2$:

se $\alpha + \beta > 2$, allora, per $t_n \to +\infty$, $f(t_n x, t_n y) = t_n^{\alpha+\beta-2} f(x,y) \to +\infty$ se $xy \neq 0$ mentre $f(t_n x, t_n y) \equiv 0$ se $xy = 0$. Se $\alpha + \beta = 2$, $f(t_n x, t_n y) \equiv f(x,y)$.
Se $\alpha + \beta < 2$, $\quad f(x,y) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} \to 0$ se $x^2 + y^2 \to +\infty$.

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$.

Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{t \to 0} f(tu) = 0\ \forall u \neq 0$. Tuttavia, $\lim_{u \to 0} f(u)$ non esiste, perché $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$. Questo fatto, insieme, ad esempio, al fatto che $f(0,y) \equiv 0$, dice anche che $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste.

DEFINIZIONE (continuitá) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $u_0 \in A$.

f é continua in u_0 se $\lim_{u \to u_0} f$ esiste e $\lim_{u \to u_0} f = f(u_0)$, ovvero se

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon : \quad \|u - u_0\| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(u_0)| \leq \epsilon$$

f é **continua in** A se é continua in ogni punto di A. $C(A)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A.

Proposizione 1 Sia $f : A \to \mathbf{R}, u \in A$. Allora

$$f \text{ é continua in } u \quad \Leftrightarrow \quad (u_n \in A, \quad u_n \to_n u \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \to f(u))$$

Proposizione 2 Siano $f, g : A \to \mathbf{R}, u \in A$. Allora

(i) f, g continue in $u \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g$ é continua in $u\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) f, g continue in $u \quad \Rightarrow \quad fg$ é continua in u e $\frac{f}{g}$ é continua in u se $g(u) \neq 0$
(iii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

Ad esempio, i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$ sono funzioni continue in $\mathbf{R}^n$, $exp(x^2+y^2)$ é continua in $\mathbf{R}^2$, etc. Nell'esempio (ii), la funzione é prolungabile con continuitá in $(0,0)$ (basta porre $f(0,0) = 0$), mentre nell'esempio (i), f é prolungabile con continuitá in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

DEFINIZIONE (insiemi limitati, aperti, chiusi, compatti)

(i) $B \subset \mathbf{R}^n$ é **limitato** se esiste $r > 0 : \quad B \subset D_r$

(ii) $O \subset \mathbf{R}^n$ é **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 : \quad D_r(u) \subset O$

(ii) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** se F' é aperto

(iii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** se é chiuso e limitato

(iv) $C \subset \mathbf{R}^n$ é **convesso** se $u, v \in C \ \Rightarrow\ tu + (1-t)v \in C \quad \forall t \in [0,1]$

PROPOSIZIONE 1

(i) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** $\Leftrightarrow$ $(u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$

(ii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** $\Leftrightarrow$ $(u_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists\ u_{k_j},\ u \in K:\ \ u_{k_j} \to u)$.

Prova. (i) $\Rightarrow$: $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap D_r(u)$ definitivamente. $\Leftarrow$: Se $u \notin F$, deve esistere $r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$, altrimenti $\forall k,\ \exists\ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F$. Ma $u_k \in F \cap D_{\frac{1}{k}}(u) \Rightarrow u_k \to_k u \Rightarrow u \in F$.

(ii) $\Rightarrow$: $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty\ \forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow \exists k_i,\ \exists\ x_1, \ldots, x_n :\ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n \Rightarrow u_{k_i} \to_i u = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.

$\Leftarrow$: Se K é non limitato, esiste $u_k \in K$ con $||u_k|| \to +\infty$. Per ogni estratta u_{k_i} é ugualmente vero che $||u_{k_i}|| \to_i +\infty$ e quindi u_{k_i} non puó convergere (sarebbe limitata !). Se K non é chiuso, esiste $u \notin K$ e $u_k \in K$ con $u_k \to u$ e quindi u_k non ha sottosuccessioni convergenti in K.

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $f \in C(K),\ K \subset \mathbf{R}^n$ compatto.

Allora, $$\exists\ \ \underline{u},\ \ \overline{u} \in K:\ -\infty < \inf_K f = f(\underline{u}), \quad f(\overline{u}) = \sup_K f < +\infty$$

Prova. Sia $u_n \in K : f(u_n) \to_n \sup_K f$. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n \to u$ per un $u \in K$. Da $f(u_n) \to f(u)$ segue che $\sup_K f = f(u) < +\infty$.

UNIFORME CONTINUITÁ f é **uniformemente continua** in A sse

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K,\ \ ||u - v|| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

(**TEOREMA DI HEINE-CANTOR**) $f \in C(K),\ K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ f é uniformemente continua in K.

Prova. Se no, $\exists\ \epsilon_0 > 0,\ u_n, v_n \in K,\ ||u_n - v_n|| \le \frac{1}{n} :\ \ |f(u_n) - f(v_n)| \ge \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $|f(u) - f(v)| \ge \epsilon_0$. Ma $||u - v|| \le ||u - u_n|| + ||u_n - v_n|| + ||v_n - v|| \quad \forall n \Rightarrow u = v$, contraddizione.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che
(i) **(coecivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \Rightarrow f(u_n) \to_n +\infty$
(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \Rightarrow \liminf_n f(u_n) \ge f(u)$.

Allora $\exists\ \ \underline{u} \in C :\ \ f(\underline{u}) = \inf_C f$.

Infatti, se $u_n \in C$, $f(u_n) \to_n \inf\limits_C f$, allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue $\inf\limits_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u)$.