AM2: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia $f \in C^1(O)$, O aperto convesso. Allora

$$|f(u) - f(v)| \leq ||u-v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u-v))\|$$

Infatti $$|f(u) - f(v)| = |\int_0^1 [\frac{d}{dt} f(v + t(u-v))] \, dt| =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u-v)), u - v > \, dt| \leq ||u-v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u-v))\|$$

Corollario 1. Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$.

Allora f é localmente Lipschitziana, ovvero se $u \in O$ ed $r > 0$ é tale che $\|v-u\| \leq r \Rightarrow v \in O$, allora

$$\exists L = L(u,r) : \qquad |f(v_1) - f(v_2)| \leq L\|v_1 - v_2\| \qquad \forall \quad v_1, v_2 \in D_r(u)$$

Basta infatti applicare il Teorema del valor medio in $D_r(u)$ per ottenere

$$|f(v_1) - f(v_2)| \leq [\sup_{v\in D_r(u)} \|\nabla f(v)\|] \quad \|v_1 - v_2\| \qquad \forall \quad v_1, v_2 \in D_r(u)$$

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso per archi. Allora

$$\nabla f(u) = 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Fissati $u, v \in O$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in O \ \forall \, t \in [0,1]$, cammino continuo in O, con $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi e quindi, dalla continuitá di γ segue: $\bar{t} := \sup\{t : f(\gamma(s)) = f(u) \quad \forall s \in [0,t)\} > 0$ e, argomentanto per contraddizione, necessariamente $\bar{t} = 1$.

Cammini differenziabili Se $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $x_i \in C^1([0,1]) \ \forall i = 1, \ldots, n$ scriveremo $\gamma \in C^1([0,1], \mathbf{R}^n)$ e diremo che γ é cammino differenziabile e

$$\dot\gamma(t) = (\dot x_1(t), \ \ldots, \dot x_n(t)) \quad \text{é il } \textbf{vettore tangente} \text{ a } \gamma \text{ in } \gamma(t) \ .$$

Esempio. $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, $\dot\gamma(t) = (-2\pi r \sin 2\pi t, 2\pi r \cos 2\pi t)$

Sia $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$, $h \in \mathbf{R}^2$. Sia $\gamma(t) = (th, f(th))$ parametrizzazione della curva ottenuta intersecando il grafico di f con il piano passante per l'asse delle z e per la retta che unisce h all'origine. Il vettore tangente alla curva γ nell'origine é

$$(h, < \nabla f(0,0), h >) = (\frac{d}{dt}(th), \frac{d}{dt}f(th))$$

Al variare di h in $\mathbf{R}^2$ si ottengono tutti i **vettori tangenti al grafico di** f in $(0,0)$).

Derivazione di funzioni composte Sia $f \in C^1(O), \gamma \in C^1([0,1], O)$ Allora

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \quad =< \ \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) \ >$$

É: $\gamma(t+s) = \gamma(t) + \dot\gamma(t)s + h(s)$, $f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u), h > + \sigma(h) \ \Rightarrow$

$$f(\gamma(t+s)) \ = \ f(\gamma(t)) + \ < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > \ s \ + \ \circ(s) \quad \text{ove}$$

$\circ(s) :=< \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))$. Infatti $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0, s_e > 0 :$

$(||k|| \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sigma(k) \leq \epsilon ||k||)$ e $(|s| \leq s_\epsilon \ \Rightarrow \ ||h(s)|| \leq \epsilon|s|$ e $||\dot\gamma(t)|||s| + ||h(s)|| \leq \delta_\epsilon)$

$\Rightarrow \ | < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > \ + \sigma(\dot\gamma(t)s \ + \ h(s))| \leq \epsilon \, |s| \, (||\nabla f(\gamma(t))|| \ + \ ||\dot\gamma(t)|| \ + \ 1)$.

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O)$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} \ = \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \ := \ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \ := \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i punti di $\mathbf{R}^n$. La matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(u) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

é detta matrice Hessiana .

Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u)\,,\, h > \;+ \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h > \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \dots, x_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u+th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(u), \qquad\qquad \varphi(1) \;=\; f(u+th)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(u+th) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th) h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(u+th) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \;=\; \sum_{j=1}^{n}\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th)h_i h_j \;= \\ = < H_f(u\,+\,t\,h)\,h,\; h >$$

Basta quindi sostituire in $\varphi(1) \;=\; \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ per ottenere

$$f(u+h) \;=\; f(u) \;+\; < \nabla f(u)\,,\, h > \;+\; \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > \;+ \\ \int_0^1 (1-t) \;<\; [H_f(u+th) \;-\; H_f(u)]\; h, h > \;\; dt.$$

La stima del resto segue da

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; |t| \le \delta_\epsilon \;\; \Rightarrow \;\; |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \;\; \Rightarrow$$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] \; h_i h_j \;| \;\le n^2 \epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \iff \exists \delta > 0 : \ f(u) \leq f(v) \ \ \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\ h > \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 = \tfrac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} = < \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) = 0, \quad 0 \leq f(u+h) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + ||h||^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > + \circ(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \geq 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$< H_f(u)\, h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u$ é minimo locale

Prova. $h \to < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \ \Rightarrow$

$$\exists\, m := \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h > \ > 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \ \geq \ m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) = \|h\|^2 \ [< H_f(u) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > + \circ(1)] \ \geq \ \|h\|^2 \ [m + \circ(1)] \ > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \ f(u) \geq f(v) \ \ \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $< H_f(u) h, h > \leq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \ < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0$$