AM2 2006-2007: II APPELLO

TEMA 1. Sia f_n una successione di funzioni continue in $\mathbf{R}$ convergente uniformemente in $\mathbf{R}$ ad una funzione f. Provare che f é continua in $\mathbf{R}$.

TEMA 2. Sia f_n una successione di funzioni continue in $\mathbf{R}$ convergente uniformemente in $\mathbf{R}$ ad una funzione f.
Provare che se esiste $c > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq \frac{c}{|x|^2} \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbf{N}$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

TEMA 3. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e sia $\lambda_1(x)$ il primo autovalore di $H_f(x)$. Supposto che esista $c > 0$ tale che $\lambda_1(x) \geq c \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$, provare che

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \quad \geq \quad c\|x - y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

Dedurre che

$$f(x) \geq f(0) - \|\nabla f(0)\| \, \|x\| + \frac{c}{2}\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

e concludere che, per ogni fissato $h \in \mathbf{R}^n$, la funzione $x \rightarrow f(x) - < x, h >$ ha esattamente un punto critico.

TEMA 4 . Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ tale che

$$\exists A, B > 0 : \qquad \|f(x)\| \leq A + B\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Provare che le soluzioni del sistema differenziale $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sono definite per tutti i tempi t.

TEMA 5. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ tale che $f(x) \rightarrow_{|x|\rightarrow+\infty} +\infty$.
Provare che se $x(t)$ é la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

allora $f(x(t))$ é una funzione decrescente e dedurre che $x(t)$ é definita per ogni $t > 0$.

Dedurre inoltre, integrando $\frac{d}{dt}f(x(t))$, che esiste $t_n \rightarrow_n +\infty$ tale che $x(t_n)$ tende a un punto stazionario di f.

ESERCIZIO 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^3} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2 - i^n)^n x^n \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^{2n}$$

e discutere il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

ESERCIZIO 2

Sia $t \geq 0$. Calcolare, effettuando un cambio di variabile ed una integrazione per parti,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{t+x}} dx$$

e stabilire se la convergenza é uniforme.

ESERCIZIO 3

Sia $\quad f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-(x^2+y^2)t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 4

Sia $\quad f(x, y) = (y - x)(y - \sqrt{x}) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

La prima serie ha raggio di convergenza 2 e converge anche in 2 e -2 (serie armonica generalizzata di esponente 2).

La seconda serie ha raggio di convergenza $\frac{1}{2}$ e diverge assolutamente se $|x| = \frac{1}{2}$.

La terza serie ha raggio di convergenza 0 (criterio del rapporto).

ESERCIZIO 2 Posto $nx = y$ e quindi integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{nt+y} dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{(nt+y)^2} dy + \frac{1}{nt} \to_n 0 \quad \forall t > 0$$

perché $\frac{\cos y}{(nt+y)^2} \to_n 0$ uniformemente in $[\delta, +\infty)$ e $|\frac{\cos y}{(nt+y)^2}| \le \frac{\cos y}{(t+y)^2}$ $\forall n$ (equidominatezza).

Lo stesso cambio di variabile fornisce, se $t = 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x} dx \to \frac{\pi}{2}\chi_{-[0,+\infty)}$. In particolare, la convergenza non é uniforme.

ESERCIZIO 3

$\nabla f(x,y) = (-2xe^{-x^4}, e^{-y^2})$ non é mai nullo, e quindi f raggiunge il suo massimo e minimo valore sulla frontiera $\{(x,y) : \quad x^2+y^2 = 1\}$ in punti che debbono soddisfare il sistema Lagrangiano

$$-2xe^{-x^4} = 2\lambda x, \quad e^{-y^2} = 2\lambda y, \quad x^2+y^2 = 1$$

Una prima soluzione é $(0, \pm 1)$ cui corrispondono i valori $\int_0^1 e^{-t^2} dt$, $\quad -\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Se $x \ne 0$, deve essere $\frac{e^{-y^2}}{2y} = \lambda = -e^{-x^4} = -e^{-(1-y^2)^2}$ ovvero $-2ye^{-y^4+3y^2-1} = 1$ Tale equazione ha esattamente due soluzioni (necessariamente negative) perché, come si vede subito, $(-2ye^{-y^4+3y^2-1})' = -2e^{-y^4+3y^2-1}(1+6y^2-4y^4) = 0$ se e solo se $y = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e dunque $y \to -2ye^{-y^4+3y^2-1}$ é strettamente crescente tra $-\infty$ e $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ ed é strettamente decrescente tra $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e $y = 0$. Siccome $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}} < -1$ e , in $y = -1$, $-2ye^{-y^4+3y^2-1}$ vale $2e > 1$, concludiamo che vi é esattamente una soluzione $\underline{y} \in (-1, 0)$ cui corrispondono due punti stazionari (vincolati) $(\pm\sqrt{1-\underline{y}^2}, \underline{y})$. La natura di tali punti si stabilisce piú facilmente studiando direttamente la funzione vincolata $y \to \int_{1-y^2}^{y} e^{-t^2} dt$ la cui derivata, data da

$e^{-y^2}[1+2ye^{-y^4+3y^2-1}]$ ha esattamente lo zero $\underline{y}$ in $(-1,1)$, che é, come si vede subito, un punto di minimo. Concludiamo quindi che

$(0,-1)$ é punto di massimo relativo sul bordo
$(0,1)$ é punto di massimo assoluto
$((\pm\sqrt{1-\underline{y}^2},\underline{y})$ sono punti di minimo assoluto

$((0,-1)$ non é massimo locale in $\{\quad x^2+y^2\leq 1\}$ perché $f_y(0,y)>0\forall y)$

ESERCIZIO 4 $\qquad f(x,y)=(x^2-y^2)^2(y-\sqrt{x}) \qquad \Rightarrow$

$$\nabla f=\left(4x(x^2-y^2)(y-\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2,\ -4y(x^2-y^2)(y-\sqrt{x})+(x^2-y^2)^2\right)=$$

$$=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x(y-\sqrt{x})(x^2-y^2)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2,\quad 4y(y-\sqrt{x})(x^2-y^2)=(x^2-y^2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2-y^2=0 \quad \text{oppure} \quad 8x\sqrt{x}(y-\sqrt{x})=(x^2-y^2),\quad (x^2-y^2)=4y(y-\sqrt{x}) \quad \Leftrightarrow$$

$x=0=y$ oppure $2x\sqrt{x}=y$. La soluzione $(0,0)$ é giá inclusa nell'insieme $\{x^2-y^2=0\}$. A queste soluzioni vanno dunque aggiunte le soluzioni del sistema $2x\sqrt{x}=y,\quad (x^2-y^2)=4y(y-\sqrt{x})$ che fornisce $x=\frac{9}{20}$ $y=\frac{27\sqrt{20}}{200}$. Dunque i punti stazionari sono

i punti delle due semirette $x+y=0,\quad x\geq 0$ e $x-y=0,\quad x\geq 0$
ed il punto $(\frac{9}{20},\frac{27\sqrt{20}}{200})$.

Nella regione $\{y>\sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di minimo, perché sono zeri di f che é non negativa in tale regione, mentre nella regione $\{y<\sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di massimo, perché sono zeri di una funzione non positiva. I punti $(1,1)$ e $(0,0)$, intersezioni tra le rette $x^2-y^2=0$ e la porzione di parabola $y=\sqrt{x}$ non sono né massimi né minimi perché sono zeri di f ed f cambia segno attorno a tali punti. Infine il punto $(\frac{9}{20},\frac{27\sqrt{20}}{200})$ appartiene alla regione $\{y<\sqrt{x}\}\cap\{y>x\}$ ed in tale regione f é negativa mentre sul bordo f é nulla: possiamo concludere che si tratta di un punto di minimo.