AM2 2006-2007: I APPELLO

TEMA 1. Siano $f_n \in C(\mathbf{R})$ tali che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ risulti totalmente convergente in $[-R, R] \quad \forall R > 0$. Provare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n$$

TEMA 2. Sia $f \in C(\mathbf{R}^n)$. Provare che

$$f(x) \rightarrow_{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{x} : \quad f(x) \geq f(\underline{x}) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

TEMA 3. Sia $f \in C^1(O)$, $\gamma \in C^1([0,1], O)$ Provare che

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \; = < \; \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \; >$$

Dedurre che, se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $g \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ allora $g \circ f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$

e

$$J_{g \circ f}(x) \quad = \quad J_g(f(x)) J_f(x)$$

TEMA 4.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Sia $f(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) \neq 0$. Provare che

$$\exists \delta > 0, \; \exists \sigma > 0, \exists \, \varphi \in C^1((-\delta, \delta), (-\sigma, \sigma)) :$$

$$f(x,y) \; = \; 0, \quad (x,y) \in (-\delta, \delta) \times (-\sigma, \sigma) \quad \Leftrightarrow \quad y \; = \; \varphi(x)$$

TEMA 5.

Sia (X, d) spazio metrico completo, $T : X \rightarrow X$ contrazione. Provare che T ha un punto fisso.

Applicare quindi il Teorema delle Contrazioni per provare il Teorema di esistenza ed unicitá locale per il problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad x(0) = x_0$$

ove $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbf{R}^n$ sono dati.

ESERCIZIO 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$(i) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-i^n)^n x^n \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$$

ESERCIZIO 2

Sia $t \geq 0$. Calcolare, effettuando un cambio di variabile ed una integrazione per parti,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x} dx$$

e stabilire se la convergenza é uniforme.

ESERCIZIO 3

Sia $\quad f(x,y) = \int_{x^2}^{y} e^{-t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 4

Sia $\quad f(x,y) = (x^2-y^2)^2 (y - \sqrt{x}) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

La prima serie ha raggio di convergenza 2 e converge anche in 2 e -2 (serie armonica generalizzata di esponente 2).

La seconda serie ha raggio di convergenza $\frac{1}{2}$ e diverge assolutamente se $|x| = \frac{1}{2}$.

La terza serie ha raggio di convergenza 0 (criterio del rapporto).

ESERCIZIO 2 Posto $nx = y$ e quindi integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{nt+y} dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{(nt+y)^2} dy + \frac{1}{nt} \to_n 0 \quad \forall t > 0$$

perché $\frac{\cos y}{(nt+y)^2} \to_n 0$ uniformemente in $[\delta, +\infty)$ e $|\frac{\cos y}{(nt+y)^2}| \leq \frac{\cos y}{(t+y)^2}$ $\forall n$ (equidominatezza).

Lo stesso cambio di variabile fornisce, se $t = 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x} dx \to \frac{\pi}{2}\chi_{-[0,+\infty)}$. In particolare, la convergenza non é uniforme.

ESERCIZIO 3

$\nabla f(x,y) = (-2xe^{-x^4}, e^{-y^2})$ non é mai nullo, e quindi f raggiunge il suo massimo e minimo valore sulla frontiera $\{(x,y): \quad x^2+y^2 = 1\}$ in punti che debbono soddisfare il sistema Lagrangiano

$$-2xe^{-x^4} = 2\lambda x, \quad e^{-y^2} = 2\lambda y, \quad x^2+y^2 = 1$$

Una prima soluzione é $(0, \pm 1)$ cui corrispondono i valori $\int_0^1 e^{-t^2} dt$, $\quad -\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Se $x \neq 0$, deve essere $\frac{e^{-y^2}}{2y} = \lambda = -e^{-x^4} = -e^{-(1-y^2)^2}$ ovvero $-2ye^{-y^4+3y^2-1} = 1$ Tale equazione ha esattamente due soluzioni (necessariamente negative) perché, come si vede subito, $(-2ye^{-y^4+3y^2-1})' = -2e^{-y^4+3y^2-1}(1+6y^2-4y^4) = 0$ se e solo se $y = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e dunque $y \to -2ye^{-y^4+3y^2-1}$ é strettamente crescente tra $-\infty$ e $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ ed é strettamente decrescente tra $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e $y = 0$. Siccome $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}} < -1$ e , in $y = -1$, $-2ye^{-y^4+3y^2-1}$ vale $2e > 1$, concludiamo che vi é esattamente una soluzione $\underline{y} \in (-1, 0)$ cui corrispondono due punti stazionari (vincolati) $(\pm\sqrt{1-\underline{y}^2}, \underline{y})$. La natura di tali punti si stabilisce piú facilmente studiando direttamente la funzione vincolata $y \to \int_{1-y^2}^{y} e^{-t^2} dt$ la cui derivata, data da

$e^{-y^2}[1+2ye^{-y^4+3y^2-1}]$ ha esattamente lo zero $\underline{y}$ in $(-1,1)$, che é, come si vede subito, un punto di minimo. Concludiamo quindi che

$(0,-1)$ é punto di massimo relativo sul bordo
$(0,1)$ é punto di massimo assoluto
$((\pm\sqrt{1-\underline{y}^2},\underline{y})$ sono punti di minimo assoluto

$((0,-1)$ non é massimo locale in $\{\quad x^2+y^2\leq 1\}$ perché $f_y(0,y)>0\forall y)$

ESERCIZIO 4 $\qquad f(x,y)=(x^2-y^2)^2(y-\sqrt{x}) \qquad \Rightarrow$

$$\nabla f=\left(4x(x^2-y^2)(y-\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2,\ -4y(x^2-y^2)(y-\sqrt{x})+(x^2-y^2)^2\right)=$$

$$=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x(y-\sqrt{x})(x^2-y^2)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2,\quad 4y(y-\sqrt{x})(x^2-y^2)=(x^2-y^2)^2\quad\Leftrightarrow$$

$$x^2-y^2=0\quad \text{oppure}\quad 8x\sqrt{x}(y-\sqrt{x})=(x^2-y^2),\quad (x^2-y^2)=4y(y-\sqrt{x})\quad\Leftrightarrow$$

$x=0=y$ oppure $2x\sqrt{x}=y$. La soluzione $(0,0)$ é giá inclusa nell'insieme $\{x^2-y^2=0\}$. A queste soluzioni vanno dunque aggiunte le soluzioni del sistema $2x\sqrt{x}=y,\quad (x^2-y^2)=4y(y-\sqrt{x})$ che fornisce $x=\frac{9}{20}$ $\quad y=\frac{27\sqrt{20}}{200}$. Dunque i punti stazionari sono

i punti delle due semirette $\quad x+y=0,\quad x\geq 0\quad$ e $\quad x-y=0,\quad x\geq 0$
ed il punto $\quad(\frac{9}{20},\frac{27\sqrt{20}}{200})$.

Nella regione $\{y>\sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di minimo, perché sono zeri di f che é non negativa in tale regione, mentre nella regione $\{y<\sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di massimo, perché sono zeri di una funzione non positiva. I punti $(1,1)$ e $(0,0)$, intersezioni tra le rette $x^2-y^2=0$ e la porzione di parabola $y=\sqrt{x}$ non sono né massimi né minimi perché sono zeri di f ed f cambia segno attorno a tali punti. Infine il punto $(\frac{9}{20},\frac{27\sqrt{20}}{200})$ appartiene alla regione $\{y<\sqrt{x}\}\cap\{y>x\}$ ed in tale regione f é negativa mentre sul bordo f é nulla: possiamo concludere che si tratta di un punto di minimo.