Esecitazione AM2 n.1-A.A. 2006-2007- 02/10/06

Successioni di funzioni

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = \frac{nx}{n+1}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$;
stabilire se vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale in $[0,1]$, ovvero se $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

4. $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ e verificare che
$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

5. $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, \infty]$.

6. $f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{1+n}$ $x \in \mathbb{R}$ e la successione delle derivate $g_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{1+n}$ se ha senso studiarala.

7. $f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, verificare se vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

8. $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [-1,1]$. Si verifichi che:
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

9. $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$ e verificare che é possibile integrare termine a termine
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

10. $f_n(x) = n^{n^x}$, in $\mathbb{R}$.

11. $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx & \text{se } x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ in $[0,1]$ e verificare che é possibile integrare termine a termine $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Soluzioni

1. Sia $x \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x = j_A(x)$ *ingezione canonica* di A in $\mathbb{R}$; la successione converge puntualmente all'ingezione canonica di A.
Studiamo la convergenza uniforme: supponiamo A limitato
$\exists M > 0$ t. c. per ogni $x \in A : |x| \leq M$, $|f_n(x) - j_A(x)| = |\frac{nx}{n+1} - x| = |\frac{nx-nx-x}{n+1}| = |\frac{-x}{n+1}| \leq \frac{M}{n+1}$, $0 \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - j_A(x)| \leq \frac{M}{n+1} \to 0$, quindi la convergenza é uniforme. Se A non é limitato la convergenza é solo puntuale.

2. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$; la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$.
Studiamo la convergenza uniforme:
$|\frac{\sin(nx)}{n+1}| \leq |\sin(nx)|\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ per $n \to \infty$, quindi la convergenza é uniforme.

3. Sia $x \in [0, +\infty)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$; la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$.
Studiamo la convergenza uniforme:
per ogni $r > 0$ in $[r, +\infty)$ le $f_n(x)$ per n abbastanza grande sono decrescenti per cui $\sup_{x\in[r,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[r,+\infty)} f_n(x) = f_n(r) = nre^{-nr^2} \to 0$ per $n \to \infty$, qundi abbiamo convergenza uniforme in $[r, +\infty)$ per ogni $r > 0$. La convergenza non é uniforme in $[0, 1]$, il $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \to \infty$ per $n \in \infty$ $(f_n'(x) = ne^{-nx^2}(1 + 2nx^2))$, infatti risulta
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{e^n} - 1\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(\frac{1}{e^n} + 1\big) = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

4. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se} x = 0 \end{cases}$ 0, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ f_n é continua e f non é continua per tanto la convergenza non é uniforme poiché conserva la continuitá. La successione risulta uniformemente convergente in $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ per ogni $a > 0$, in quanto risulta $\sup_{|x| \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x| \geq a} \left| \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+n^2a^2} \to 0$ per $n \to \infty$. Nonostante la convergenza non sia uniforme in $[-1, 1]$ vale
$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n^2t^2}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x$
$= 2\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+n^2x^2}\right)\mathrm{d}x = 2\lim_{n\to\infty} \left[t - \frac{-\arctan(nt)}{n}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{\arctan n}{n}\right)$
$= 2 = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

5. Sia $x \in [0, \infty)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $[0, \infty)$.
Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n \in \mathbb{N}^*$, si tratterá di studiare dove la $f_n'(x) > 0$, $f_n'(x) = n^pe^{-nx} - n^{p+1}xe^{-nx} = n^pe^{-nx}(1 - nx) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. Si prova che la convergenza é uniforme in ogni intervallo del tipo $[r, \infty)$ per ogni $r > 0$ e $p \in \mathbb{R}$, infatti in $[r, \infty)$ $f_n'(x) < 0$ definitivamente per $n \to \infty$ e quindi le $f_n(x)$ sono definitivamente decrescenti, dunque per n abbastanza grande $\sup_{x\in[r,\infty)} |f_(x) - f(x)| = \sup_{x\in[r,\infty)} f_(x) = f_n(r) = n^pre^{-nr} \to 0$ per $n \to \infty$.
In $[0, 1]$: $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = n^pe^{-n}$, $f_n(\frac{1}{n}) = n^{p-1}e^{-1}$ e
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} n^{p-1}e^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1, \\ \frac{1}{e} & \text{se } p = 1, \\ \infty & \text{se } p > 1. \end{cases}$$
Il limite puntuale é uniforme in $[0, 1]$ se $p < 1$.

6. Sia $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+n} - \frac{e^{-nx}}{1+n}$, per $x = 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, per $x > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per $x < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$, quindi per $x < 0$ non c' é convergenza puntuale, mentre in $[0, \infty)$ la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $[0, \infty)$.
Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{1-e^{-nx}}{1+n}$, si tratterá di studiare dove la $f_n'(x) > 0$, $f_n'(x) = \frac{ne^{-nx}}{1+n} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_+$, per

tanto $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+n} = \frac{1}{1+n} \to 0$ per $n\to\infty$. Dunque la successione converge uniformemente in $[0,\infty)$.
Studiamo la successione delle derivate $g_n(x)=\frac{ne^{-nx}}{1+n}$, $x\in\mathbb{R}_+$, poiché per $x<0$ non c' é convergenza puntule. Risulta convergere puntualmente $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0, \\ 0 & \text{se } x>0, \end{cases}$ ma per ogni $n\in\mathbb{N}$ g_n é continua, mentre g é discontinua in $x=0$ dunque la convergenza non é uniforme in quanto la convergenza uniforme conserva la continuitá.
Sia $a>0$, studiamo la convergenza uniforme in $[a,\infty)$:
fissiamo $n\in\mathbb{N}$ $\sup_{x\in[a,\infty)}|g_n(x)-g(x)| = \sup_{x\in[a,\infty)}\frac{ne^{-nx}}{1+n}$, si tratterá di studiare dove la $g_n'(x)>0$, $g_n'(x)=\frac{-n^2e^{-nx}}{1+n}<0$ per ogni $x\in[a,\infty)$, per tanto g_n risulta strettamente decrescente in $[a,\infty)$ quindi $\sup_{x\in[a,\infty)}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{x\to a^+}\frac{ne^{-nx}}{1+n} = \frac{ne^{-na}}{1+n} \to 0$ per $n\to\infty$. La successione non converge uniformemente in $[0,\infty)$, ma se ci discostiamo considerando $a>0$ converge uniformememte in $[a,\infty)$.

7. Sia $x\in[0,1]$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=x$ per ogni $x\in[0,1]$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)=x$ in $[0,1]$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   $|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}$, per ogni $x\in[0,1]$, quindi la convergenza é uniforme. La f_n é derivabile $f_n'(x)=1-x^{n-1}$ per ogni $x\in[0,1]$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=1, \\ 1 & \text{se } x\in[0,1), \end{cases}$ per tanto $f'(1)\neq\lim_{n\to\infty} f_n'(1)$, f_n' non é uniformemente convergente in [0,1], non vale il teorema di passaggiio al limite in $x=1$.

8. Sia $x\in[-1,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)\equiv 0$ in $[-1,1]$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   fissiamo $n\in\mathbb{N}$, $\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\sqrt{\frac{1}{1+2n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n \to +\infty$, per cui la convergenza non é uniforme. Risulta $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

9. Sia $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\mathrm{sign}x$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)=\mathrm{sign}x$ in $\mathbb{R}$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   fissiamo $n\in\mathbb{N}$, la convergenza non é uniforme in quanto la funzione limite f é discontinua invece f_n é continua e la convergenza uniforme

conserva la continuitá. Risulta possibile l'integrazione termine a termine:
$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\Big(\arctan n - \frac{1}{2n}\log(1+n^2)\Big) = 1 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

10. Sia $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) = n^{n^x} = e^{\log n^{nx}} = e^{nx\log n}$, $f_n(x)$ é crescente in x, $f_n(x) > 1$ ($n^x \log n > 0$) per ogni x, se $x \geq 0$ $f_n(x) \leq n \to +\infty$ per $n\to\infty$, se $x < 0$ $f_n(x) = f_n(-y) = e^{\frac{\log n}{n^y}} \to 1^+$ per $n\to\infty$, per tanto la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = 1$ in $(-\infty, 0)$.
Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n\in\mathbb{N}$, in $[-r,0]$, $r>0$, $\sup_{[-r,0]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{[-r,0]}(n^{n^x} - 1) = n-1 \to \infty$ per $n\to\infty$, quindi non si ha convergenza uniforme in intervalli del tipo $[-r,0]$ e anche in intervalli contenenti l'origine. Consideriamo $(-\infty,-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ per isolare l'origine, risulta $\sup_{(-\infty,-\varepsilon]}|f_n(x)-f(x)| = e^{\frac{\log n}{n^\varepsilon}} - 1 \to 0$ per $n\to\infty$.Dunque $f_n(x)$ converge uniformemente a 1 in $(-\infty,-\varepsilon]$, con $\varepsilon>0$.

11. Sia $x\in[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)\equiv 0$ in $[0,1]$.
Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n\in\mathbb{N}$, la convergenza non é uniforme in quanto $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{2n}) = 1$. Risulta possibile integrare termine a termine:
$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Lavoro a casa

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$, $x\in\mathbb{R}$;
stabilire se vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2. $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$, $x\in[0,\infty)$.

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x\in[0,\infty)$.

4. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [1, \infty)$.

5. $f_n(x) = n^2 \int_0^x \frac{\sin(x^n t)}{t} \mathrm{d}t$, $x \in [0, 1]$.

Soluzioni

1. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sqrt{x}^2 = |x|$; la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = |x|$ in $\mathbb{R}$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}^2 = \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}^2} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ per $n \to \infty$, quindi le f_n convergono uniformemente a f. Le f_n sono t.c. $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$, $f_n'(x) \to \frac{x}{|x|}$ per $n \to \infty$; le f_n' sono tutte derivabili, le f_n convergono verso f, ma f non derivabile (la successione delle derivate non uniformemente convergente), quindi non vale il teorema.

2. Sia $x \in [0, \infty)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $[0, \infty)$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   fissiamo $n \in \mathbb{N}$, si tratterá di studiare dove la $f_n'(x) > 0$, $f_n'(x) = \frac{1+nx-nx}{(n+1)^2} > 0$ per ogni $x > 0$, quindi la f_n é strettamente crescente in tutto $[0, \infty)$, $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$, quindi la convergenza é uniforme in $[0, \infty)$.

3. Sia $x \in [0, \infty)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $[0, \infty)$.
   Studiamo la convergenza uniforme:
   fissiamo $n \in \mathbb{N}^*$, si tratterá di studiare dove la $f_n'(x) > 0$, $f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2)-2n^2x(nx)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} > 0 \leftrightarrow n - n^3x^2 = n(1-n^2x^2) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} > x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) = \frac{1}{2}$ per cui la convergenza non é uniforme in $[0, \infty)$. In $[1, \infty)$ la f_n sará decrescente ed $f_n(1) = \frac{n}{1+n^2}$ per cui essendo $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{1+n^2} \to 0$ per $n \to \infty$ si ha convergenza uniforme in $[1, \infty)$.

4. Sia $x \in [1, \infty)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $[0, \infty)$.

Studiamo la convergenza uniforme:
fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $x \in [1, \infty)$, $\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, per cui $\sup_{x\in[1,\infty)} \frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ per il confronto la convergenza é uniforme in $[1, \infty)$.

5. Sia $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, x]$, si ha che $0 \leq x^n t \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \sin(x^n t) \leq x^n t$.
Risulta che:
$0 \leq f_n(x) = n^2 \int_0^x \frac{\sin(x^n t)}{t} \mathrm{d}t \leq n^2 \int_0^x \frac{x^n t}{t} \mathrm{d}t = n^2 x^{n+1}$, per tanto $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, per $x \in [0, 1)$. Per $x = 1$, abbiamo che $f_n(1) = n^2 \int_0^1 \frac{sint}{t} \mathrm{d}x \to +\infty$ per $n \to \infty$. Dunque la successione converge puntualmente su $[0, 1[$.
Studiamo la convergenza uniforme:
ogni f_n é continua su $[0, 1]$, per cui se $f_n \to 0$ uniformemente in $A \subset [0, 1[$, deve essere convergente a 0 in $\bar{A}$, per cui $A \subset [0, 1 - \delta]$ per qualche $\delta \in]0, 1[$. D'altra parte se A verifica tale condizione risulta: $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in A} f_n(x) \leq n^2(1 - delta)^{n+1} \to 0$ per $n \to \infty$. Dunque si ha convergenza uniforme su insiemi A t. c. $A \subset [0, 1 - \delta]$ per qualche $\delta \in]0, 1[$.