Esecitazione AM2 n.1-A.A. 2006-2007- 16/10/06

Serie di funzioni e serie di potenza

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$, e provare che é integrabile termine a termine in ogni $[a, b]$, ma non derivabile termine a termine.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n(3n-1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \quad x \in \mathbb{R}$, e verificare che pur non essendo uniformemete convergente in $[0, 1]$, é integrabile termine a termine.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin x+n}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   Studiare le seguenti serie di potenze:
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n(n-1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}, \quad x \in \mathbb{R}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4} e^{nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+9^n} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$

Soluzioni

1. Sia $x \in \mathbb{R}$, la serie si studia con il criterio di Leibniz:
   CRITERIO DI LEIBNIZ
   Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ serie a segno alterno, tale che:

   (a) per ogni $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ (monotona decrescente),
   (b) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$,

   allora la serie converge e posto $s = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ risulta che per ogni $n \in \mathbb{N}$: $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$, dove s_n denota la somma parziale $n-$sima della serie.

   Dimostrazione

   Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e consideriamo $s_{2n} = s_{2n-1} + |a_{2n}| = s_{2n-2}| - |a_{2n-1} + |a_{2n}| \leq s_{2n-2} = s_{2(n-1)}$, pertanto la successione $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é monotona decrescente. Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e consideriamo $s_{2n+1} = s_{2n-1} + |a_{2n}| - |a_{2n+1}| \geq s_{2n-1}$, quindi la successsione $(s_{2n+1})_{n\mathbb{N}}$ é monotona crescente. Proviamo che per ogni $p, q \in \mathbb{N}$: $s_{2p+1} \leq s_{2q}$; studiamo i due casi se $p \geq q$ risulta $s_{2p+1} = s_{2p} - |a_{2p+1}| \leq s_{2q} - |a_{2p+1}| \leq s_{2q}$; se $p < q$ risulta $s_{2p+1} \leq s_{2q+1} = s_{2q} - |a_{2q+1}| \leq s_{2q}$. Le due successioni $(s_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2q})_{q\in\mathbb{N}}$ sono separate, quindi la successione $(s_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente, la successione $(s_{2q})_{q\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente e risulta

   $$s_1 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \sup_{p\in\mathbb{N}} s_{2p+1} \leq \inf_{q\in\mathbb{N}} s_{2q} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_0.$$

   Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$: $s_{2n+1} = s_{2n} - |a_{2n+1}| \quad \to \quad s_1 = s_0 + 0$ per $n \to \infty$ quindi $s_0 = s_1$ ed esiste $\lim_{n\to\infty} s_n = s = s_1 = s_0$.
   Proviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$ dividendo la dimostrazione nei due casi n pari e n dispari. Se $n = 2p$, sappiamo che $s = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_{2n} \leq s_{2p}$ e $s = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{2n+1} \geq s_{2p+1}$, allora $|s - s_n| = |s - s_{2p}| = s_{2p} - s \leq s_{2p} - s_{2p+1} = |a_{2p+1}| = |a_{n+1}|$. Se $n = 2p+1$, $|s - s_n| = |s - s_{2p+1}| = s - s_{2p+1} \leq s_{2p+1} \leq s_{2p+2} - s_{2p+1} = |a_{2p+2}| = |a_{n+1}|$.

   Ritorniamo alla nostra serie, é a segni alterni, $|a_n(x)|$ é decrescente e il $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x^2} = 0$, per tanto la serie converge puntualmentein $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

risulta per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$$|s_n(x) - s(x)| = \Big| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2} \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k+x^2} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1},$$

da cui $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = 0$, dalla proprietá ricordata precedentemente. Intuitivamente basta osservare che:

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k+x^2} \Big| = \Big| (-1)^n \Big(\frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+2+x^2} + \frac{1}{n+3+x^2} - \dots \Big) \Big|,$$

e poiché $\frac{1}{n+x^2}$ é decrescente, $\frac{1}{n+3+x^2} < \frac{1}{n+2+x^2}$, ovvero $\frac{1}{n+3+x^2} - \frac{1}{n+2+x^2} < 0$ e cosí via tutti i termini che seguono sono a coppie negativi $(-\frac{1}{n+m+x^2} + \frac{1}{n+m+1+x^2} < 0)$ e la loro somma non supera $\frac{1}{n+1+x^2}$, quindi possiamo maggiorare tutto con il primo termine $\frac{1}{n+1+x^2}$.
Dunque la serie converge uniformemente.
La serie non converge assolutamente in quanto la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ ha il comportamento della serie armonica quindi diverge.

2. Sia $x \in \mathbb{R}$, per confronto la serie ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ infatti $a_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Quindi la serie é convergente, totalmente convergente e quindi uniformemente convergente, per tanto risulta:
$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{1}{n^2+x^2} \mathrm{d}x$.

3. Sia $x \in \mathbb{R}$, se $x = 0$ tutti termini della serie sono nulli, quindi la serie converge; se $x < 0$ risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx}}{n} x = \infty$, per cui dal teorema generale la serie non converge. Se $x > 0$ possiamo usare il criterio della radice, oppure considerare l'ordine di infinitesimo della serie, che é maggiore di uno quindi la serie converge (comporta che ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 1$, che converge). La serie converge quindi puntualmente in $[0, \infty)$.

Studiamo la convergenza totale:
$\left(\frac{e^{-nx}}{n}x\right)' = \frac{1}{n}e^{-nx} - n\frac{1}{n}xe^{-nx} = \frac{1}{n}e^{-nx}(1-nx) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{n}$, quindi $a_n(x)$ é crescente in $[0, \frac{1}{n}]$ e decrescente in $(\frac{1}{n}, \infty)$. Risulta: $\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{e^{-nx}}{n}x = a_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2e}$; fissato $n \in \mathbb{N}$ risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n(x)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2e}$ che converge, quindi la serie é totalmente convergente, dunque anche uniformemente convergente.

4. Sia $x \in \mathbb{R}$ per confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$ la serie converge in $\mathbb{R}$, infatti:
$\left|\frac{\sin(n^2x)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ che converge $(3/2 > 1)$; dunque la serie é uniformemente convergente in $\mathbb{R}$.
La convergenza uniforme assicura l'integrazione termine a termine in ogni intervallo $[a, b]$, $a < b$; la serie delle derivate é $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cos(n^2x)$ e non coverge in alcun punto per ció la nostra serie non é derivabile termine a termine.

5. Sia $x \in \mathbb{R}$, studiamo la convergenza della serie con il criterio del rapporto:
$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \frac{|x-1|^{n+1}}{2^{n+1}(3n+3-1)}\frac{2^n(3n-1)}{|x-1|^n} = \frac{|x-1|(3n-1)}{2(3n+2)} \to \frac{|x-1|}{2}$, quindi la serie converge se e solo se $\frac{|x-1|}{2} < 1 \iff -1 < x < 3$. Per $x = 3$ la serie diventa:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ che per il criterio di Leibnitz converge; per $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$, che é assimilabile alla serie armonica che diverge, dunque diverge. Quindi la serie converge in $(-1, 3]$.

6. Sia $x \in \mathbb{R}$ si vede che $\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0$ quindi la serie non diverge, risulta allora che $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, con

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

infatti sappiamo che se $x \neq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ converge, se $x = 1$ la serie diventa 0. Dunque la serie converge in $[-1, 1]$, ma la convergenza non puó essere uniforme in quanto la $s(x)$ é discontinua ed é limite di funzioni continue. Risulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n(1-x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 = \int_0^1 s(x)\mathrm{d}x.$$

7. Sia $x \in \mathbb{R}$, per il criterio di Leibniz per serie a segno alterno converge, infatti risulta il $\lim_{n\to\infty} |a_n(x)| = 0$, ed é decrescente il termine $|a_n(x)|$. Studiamo la convergenza uniforme:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{kx^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

risulta per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|s_n(x) - s(x)| \leq |a_{n+1}| \leq \left|(-1)^{n+1} \frac{\sin x + n + 1}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0, n \to \infty,$$

dunque la convergenza é uniforme, ma non é assoluta, in quanto: $\left|(-1)^n \frac{\sin x + n}{n^2}\right| \geq \frac{n+1}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ ha lo stesso comportamento della serie armonica che diverge.

8. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$, quindi il raggio di convergenza é $R = 0$, per cui la serie converge solo in $x = 0$.

9. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}} = \frac{1}{3}$, quindi il raggio di convergenza é $R = 3$, per cui si ha convergenza assoluta in $(-3, 3)$, la serie non converge in $\mathbb{R} \setminus [-3, 3]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < k < 3$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$.
Se $x = 3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge; se $x = -3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ assolutamente convergente quindi convergente. La serie dunque converge puntualmente in $[-3, 3]$.

10. Sia $x \in \mathbb{R}$, poniamo $y = \frac{x}{e^x}$, allora studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ che ha raggio di convergenza $R = 1$, per cui si ha convergenza assoluta per $|y| < 1$, la serie non converge in $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < k < 1$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$. La serie di partenza allora converge per $|y| = |\frac{x}{e^x}| < 1$.
Se $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ serie costante di costante valore 1 che diverge; se $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ che non converge.

11. sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = 0$, quindi il raggio di convergenza é $R = +\infty$, per cui si ha convergenza in tutto $\mathbb{R}$ e totale quindi uniforme convergenza in ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$.

12. Sia $x \in \mathbb{R}$, poniamo $y = x - 2$, studiamo allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n(n-1)}$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n(n-1)}} = \frac{1}{2}$, quindi il raggio di convergenza é $R = 2$, per cui si ha convergenza assoluta in $]-2, 2[$, la serie non converge in $\mathbb{R}\setminus[-2, 2]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 2$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$.
Se $y = 2$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ che non converge in quanto ha lo stesso comportamento della serie armonica; se $y = -2$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$ che é convergente per il criterio di Leibniz. La serie dunque converge puntualmente in $[-2, 2)$. Dunque sostituendo la serie di partenza é convergente per $-2 \le x - 2 < 2$, ovvero in $[0, 4)$.

13. Sia $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{\log(2+n)} = 1$, $n \to \infty$, quindi il raggio di convergenza é $R = 1$, per cui si ha convergenza assoluta in $(-1, 1)$, la serie non converge in $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 1$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$. Se $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)}$ che per il criterio di Leibniz converge, essendo infinitesima e decrescente, ma non é assolutamente convergente in quanto la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)}$ diverge per il criterio del confronto $\frac{1}{\log(1+n)} \ge \frac{1}{n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per il teorema di Abel la serie converge in $[-1, 1]$; se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)}$ che diverge. Per tanto la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$, assolutamente in $(-1, 1)$ e uniformemente in ogni intervallo del tipo $[-1, a]$, con $a < 1$.

14. Sia $x \in \mathbb{R}$, la serie si puó studiare ad esempio con il criterio della radice, ma puó essere vista anche come serie di potenza se poniamo $y = x^2$, quindi studiamo la serie di potenza $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n y^n$, risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n} = 3$, quindi il raggio di convergenza é $R = 1/3$, per cui si ha convergenza assoluta per $y \in (-1/3, 1/3)$, la serie non converge in $\mathbb{R}\setminus[-1/3, 1/3]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 1/3$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$.
Se $y = 1/3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ che non converge infatti risulta
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+3-3}{3n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big(1 -$

$\left.\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1} \neq 0$; se $y = -1/3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ che analogamente al caso precedente non converge. La serie di partenza dunque converge puntualmente, uniformemente e assolutamente se $x^2 < 1/3$ ovvero in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

15. Sia $x \in \mathbb{R}$, poniamo $e^x = y$ e studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2n+4} y^n$, risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2n+4}} = 1$, quindi il raggio di convergenza é $R = 1$, per cui si ha convergenza assoluta per $y \in (-1, 1)$, la serie non converge in $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 1$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$.
Se $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4}$ che é convergente ad esempio per il criterio del rapporto; se $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2n+4}$ che é assolutamente convergente quindi convergnte. Tornando alla serie di partenza: $-1 < e^x < 1 \iff x < 0$, quindi la serie converge puntualmente in $(\infty, 0)$ e totalmente in ogni intervallo compatto in $(\infty, 0)$.

16. Sia $x \in \mathbb{R}$, risulta
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+9^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{9^n\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right)}} = \frac{1}{9}$, quindi il raggio di convergenza é $R = 9$, per cui si ha convergenza assoluta per $y \in (-9, 9)$, la serie non converge in $\mathbb{R} \setminus [-9, 9]$, inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 9$ la serie converge totalmente, quindi uniformemente in $[-k, k]$.
Se $x = \pm 9$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 9)^n}{3^n+9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$ che non convergono in quanto il loro termine generico non é infinitesimo. La serie dunque converge puntualmente in $(-9, 9)$.

Esecitazione AM2 n.1-A.A. 2006-2007- 16/10/06

Serie di funzioni e serie di potenza
Lavoro a casa

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4+3n^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(\log n)^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-5^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+4}, \quad x \in \mathbb{R}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n+\log n}, \quad x \in \mathbb{R}$, é derivabile termine a termine?