AM2 2006-2007: II ESONERO

TEMA 1. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in $u \in \mathbf{R}^n$.

Provare che f é continua in u e

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \quad \exists \ \frac{\partial f}{\partial h}(u) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial h}(u) \ = < \nabla f(u), h >$$

Mostrare con un esempio che una funzione continua puó essere dotata di derivate direzionali in ogni punto e non essere differenziabile in qualche punto.

TEMA 2. Sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$. Provare che

(i) $f \in C^1 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) \ = \ 0$

(ii) $f \in C^2 \quad \Rightarrow \quad < H_f(x)\, h,\ h > \geq \ 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Provare con un esempio che puó accadere che $< H_f(x)\, h,\ h >= 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

TEMA 3. Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$.

Sia $\Gamma \ = \ \{g = 0\}$ e $\nabla g(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$.

Sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \Gamma$. Provare che

$$\exists \, \lambda \in \mathbf{R} : \qquad \nabla f(x_0, y_0) \ = \ \lambda \nabla g(x_0, y_0) \qquad (*)$$

Mostrare con un esempio che se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ $(*)$ puó non verificarsi.

TEMA 4. Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.

Provare che esiste $T > 0$ ed esistono due funzioni di classe $C^1([-T, T])$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ tali che

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \quad \forall t \in (-T, T)$$

Provare che , se f dipende solo dalla x e g dipende solo dalla y, allora lo stesso risultato vale anche se f e g sono solamente continue.

ESERCIZIO 1

Sia $\quad f(x,y) = \int\limits_x^y e^{-t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x,y) : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 2

Sia $\quad f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 (y - x^2) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

ESERCIZIO 3

Sia f come nell'esercizio 2.

Dire per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\quad \Gamma_c = \{(x,y) : \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano. Giustificare la risposta.

Provare poi, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_1 ha retta tangente nel punto $(0,1)$ e scrivere la retta tangente a Γ_1 in tale punto.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_9 ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4

Sia $f(x,y,z) = \frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{x^4+y^2+z^4}, \quad f(0,0,0) = 0.$

Calcolare, se esistono, le derivate parziali, le derivate direzionali, il differenziale di f in $(0,0,0)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 $\nabla f(x,y) = (-e^{-x^2}, e^{-y^2})$ non é mai nullo, e quindi f raggiunge il suo massimo e minimo valore sulla frontiera $\{(x,y): \quad x^2+y^2=1\}$ in punti che debbono soddisfare il sistema Lagrangiano

$$-e^{-x^2} = \lambda x, \quad e^{-y^2} = \lambda y, \quad x^2+y^2=1$$

Siccome, necessariamente, $x \neq 0 \neq y$, deve essere $-\frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{e^{-y^2}}{y}$ ovvero, posto

$$\varphi(t) = \tfrac{e^{-t^2}}{t}, \qquad \text{deve essere} \qquad \varphi(y) = -\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Siccome $\varphi'(t) = -\frac{e^{-t^2}}{t} - 2e^{-t^2}$ é negativa per ogni $t \neq 0$, deve essere $y = -x$. Dall'equazione del vincolo otteniamo le soluzioni $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Siccome

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

conludiamo che $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt$ e $-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt$ sono rispettivamente il massimo ed il minimo valore cercati.

ESERCIZIO 2 $f(x,y) = (x^2-y^2)^2(y-x^2) \quad \Rightarrow$

$$\nabla f = (4x(x^2-y^2)(y-x^2) - 2x(x^2-y^2)^2, \quad -4y(x^2-y^2)(y-x^2) + (x^2-y^2)^2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x(y-x^2)(x^2-y^2) = 2x(x^2-y^2)^2, \quad 4y(y-x^2)(x^2-y^2) = (x^2-y^2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$x^2 - y^2 = 0$ oppure $4x(y-x^2) = 2x(x^2-y^2), \quad (x^2-y^2) = 4y(y-x^2) \quad \Leftrightarrow$

$x = 0 = y$ oppure $2(y-x^2) = (x^2-y^2) = 4y(y-x^2)$. La soluzione $(0,0)$ é giá inclusa nell'insieme $\{x^2-y^2=0\}$. A queste soluzioni vanno dunque aggiunte le soluzioni del secondo sistema, ovvero $y = \frac{1}{2}, x = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}$. Dunque i punti stazionari sono

i punti delle due rette $x+y=0$ e $x-y=0$ ed i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{12}}, \frac{1}{2})$.

Nella regione $\{y > x^2\}$ i punti in $\{x^2 = y^2\}$ sono tutti di minimo, perché sono zeri di f che é non negativa in tale regione, mentre nella regione $\{y < x^2\}$

i punti in $\{x^2 = y^2\}$ sono tutti di massimo, perché sono zeri di una funzione non positiva. I punti $(\pm 1, 1)$ e $(0,0)$ non sono né massimi né minimi perché sono zeri di f ed f cambia segno attorno a tali punti. Infine i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{12}}, \frac{1}{2})$ appartengono rispettivamente alle regioni $\{y > x^2\} \cap \{y < x\}$ e $\{y > x^2\} \cap \{y < -x\}$. In tali regioni f é positiva mentre sul loro bordo f é nulla: possiamo concludere che si tratta di punti di massimo.

ESERCIZIO 3 Sia f come nell'esercizio 2. Dire, giustificando la risposta, per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y) : \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano.

I valori cririci di f, cioé i valori di f nei suoi punti critici, sono 0 e $\frac{1}{72}$. In altre parole non vi sono punti critici di f a livello c, cioé non ci sono punti critici di f in Γ_c se e solo se $c \neq 0, \frac{1}{72}$. Per il Teorema del Dini, Γ_c é localmente attorno ad ogni suo punto un grafico cartesiano se e solo se $c \neq 0, \frac{1}{72}$.

Siccome $f(0,1) = 1$, $(0,1) \in \Gamma_1$. Inoltre, $f_y(0,1) = 5$, $\quad f_x(0,1) = 0$ e quindi, localmente attorno a $(0,1)$ Γ_1 é il grafico di una funzione $y = y(x)$ e quindi la retta tangente a Γ_1 in $(0,1)$ ha equazione $y - 1 = y'(0)x$. Dal Teorema del Dini : $y'(0) = -\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)} = 0$. Dunque la retta tangente é $y = 1$.

Siccome $f(1,2) = 9$, $(1,2) \in \Gamma_9$. Inoltre, $\nabla f(1,2) = (-30, 33)$. Siccome, dal teorema del Dini segue che $(1, -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)})$ é vettore tangente a Γ_9 in $(1,2)$ e $< f_x(1,2), f_y(1,2), (1, -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)}) = 0$, riconosciamo che $\nabla f(1,2) = (-30, 33)$ é vettore normale a Γ_9 in $(1,2)$.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_9 ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4 Siccome $\quad f(x,y,z) = \frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{x^4 + y^2 + z^4}, \quad , f(0,0,0) = 0$ é nulla lungo gli assi coordinati, le derivate parziali in f_x, f_y, f_z sono tutte nulle in $(0,0,0)$. Poi, $\frac{1}{t} f(tx, ty, tz) = t^{\frac{2}{3}} \frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{t^2 x^4 + y^2 + t^2 z^4} \to_{t \to 0} 0$, le derivate direzionali in $(0,0,0)$ sono tutte nulle.

Infine, siccome le derivate perziali in zero sono tutte nulle, differenziabilitá in zero equivale a dire che $\frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{(x^4 + y^2 + z^4)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ tende a zero quando $x^2 + y^2 + z^2$ tende a zero. Ma , calcolando tale quoziente in (x, x^2, x) troviamo $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{2x^2 + x^4}}$ che va all'infinito al tendere di x a zero: f non é differenziabile nell'origine.