AM2 2006-2007: II ESONERO

TEMA 1.

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, O aperto convesso in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$|f(u) - f(v)| \leq ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Dedurre che una funzione di classe C^1 a gradiente nullo su di un aperto connesso per archi é costante.

TEMA 2.

Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, e $x \in \mathbf{R}^n$ tale che $\nabla f(x) = 0$. Provare che

$$< H_f(x)\, h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad x \quad \text{é punto di minimo (locale)}$$

TEMA 3.

Utilizzare il Principio dei moltiplicatori di Lagrange per provare che, se $\mathcal{A} = (a_{ij})$ é matrice simmetrica $n \times n$, allora

$$m = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\, h, h > \qquad \text{é il piú piccolo autovalore di } \mathcal{A}.$$

TEMA 4.

Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}), (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

Provare che esiste $r > 0$ ed esistono due funzioni $x = x(t),\ y = y(t), t \in [-r, r]$ di classe C^1 tali che

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = g(x(t), y(t) \quad \forall t \in (-r, r)$$

Mostrare con un esempio che se f e g sono solamente continue vi sono in generale piú funzioni che hanno le proprietá indicate.

ESERCIZIO 1

Sia $\quad f(x,y) = \int\limits_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x,y): \quad x^2+y^2 \le 1\}.$

ESERCIZIO 2

Sia $\quad f(x,y) = (x^2-y^2)^2(2y-x^2) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

ESERCIZIO 3

Sia f come nell'esercizio 2.

Dire per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y): \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano. Giustificare la risposta.

Provare poi, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_2 ha retta tangente nel punto $(0,1)$ e scrivere la retta tangente a Γ_1 in tale punto.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che $\Gamma_2 7$ ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4

Sia $f(x,y,z) = \frac{x^2yz^{\frac{4}{3}}}{x^4+y^2+z^4}, \quad , f(0,0,0) = 0.$

Calcolare, se esistono, le derivate parziali, le derivate direzionali, il differenziale di f in $(0,0,0)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

$\nabla f(x,y) = (-2xe^{-x^4}, 2ye^{-y^4})$ si annulla solo in $(0,0)$, che, come si vede scrivendo la matrice Hessiana, che ha autovalori $-2, 2$, é punto di sella. Quindi f raggiunge il suo massimo e minimo valore sulla frontiera $\{(x,y): \quad x^2+y^2=1\}$ in punti che debbono soddisfare il sistema Lagrangiano

$$-2xe^{-x^2} = \lambda x, \quad 2ye^{-y^2} = \lambda y, \quad x^2+y^2=1$$

che ha come soluzioni $x=0$ e quindi $y=\pm 1$ e $y=0, x=\pm 1$. In $(0,\pm 1)$ la funzione vale $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ mentre in $(\pm 1, 0)$ la funzione vale $\int_1^0 e^{-t^2}dt$. Dunque $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ é il massimo di f sul disco, mentre $-\int_0^1 e^{-t^2}dt$ é il minimo.

ESERCIZIO 2 $\qquad f(x,y) = (x^2-y^2)^2(2y-x^2) \qquad \Rightarrow$

$$\nabla f = (4x(x^2-y^2)(2y-x^2) - 2x(x^2-y^2)^2, \quad -4y(x^2-y^2)(2y-x^2) + 2(x^2-y^2)^2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x(2y-x^2)(x^2-y^2) = 2x(x^2-y^2)^2, \quad 2y(2y-x^2)(x^2-y^2) = (x^2-y^2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2-y^2=0 \quad \text{oppure} \quad 4x(2y-x^2) = 2x(x^2-y^2), \quad (x^2-y^2) = 2y(2y-x^2) \quad \Leftrightarrow$$

$x=0=y$ oppure $2(2y-x^2) = x^2-y^2 = 2y(2y-x^2)$. La soluzione $(0,0)$ é giá inclusa nell'insieme $\{x^2-y^2=0\}$. A queste soluzioni vanno dunque aggiunte le soluzioni del secondo sistema, ovvero $y=1, x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Dunque i punti stazionari sono

i punti delle due rette $x+y=0$ e $x-y=0$ ed i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}, 1)$.

Nella regione $\{2y > x^2\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di minimo, perché sono zeri di f che é non negativa in tale regione, mentre nella regione $\{y < x^2\}$ i punti in $\{x^2=y^2\}$ sono tutti di massimo, perché sono zeri di una funzione non positiva. I punti $(\pm 2, 2)$ e $(0,0)$ non sono né massimi né minimi perché sono zeri di f ed f cambia segno attorno a tali punti. Infine i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}, 1)$ appartengono rispettivamente alle regioni $\{2y > x^2\} \cap \{y < x\}$ e $\{2y > x^2\} \cap \{y < -x\}$. In tali regioni f é positiva mentre sul loro bordo f é nulla: possiamo concludere che si tratta di punti di massimo.

ESERCIZIO 3 Sia f come nell'esercizio 2. Dire, giustificando la risposta, per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y) : \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano.

I valori cririci di f, cioé i valori di f nei suoi punti critici, sono 0 e $\frac{4}{27}$. In altre parole non vi sono punti critici di f a livello c, cioé non ci sono punti critici di f in Γ_c se e solo se $c \neq 0, \frac{4}{27}$. Per il Teorema del Dini, Γ_c é localmente attorno ad ogni suo punto un grafico cartesiano se e solo se $c \neq 0, \frac{4}{27}$.

Siccome $f(0,1) = 2$, $(0,1) \in \Gamma_2$. Inoltre, $f_y(0,1) = 10, \quad f_x(0,1) = 0$ e quindi, localmente attorno a $(0,1)$ Γ_1 é il grafico di una funzione $y = y(x)$ e quindi la retta tangente a Γ_1 in $(0,1)$ ha equazione $y - 1 = y'(0)x$. Dal Teorema del Dini : $y'(0) = -\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)} = 0$. Dunque la retta tangente é $y = 1$.

Siccome $f(1,2) = 27$, $(1,2) \in \Gamma_27$. Inoltre, $\nabla f(1,2) = (-30, 33)$. Siccome, dal teorema del Dini segue che $(1, -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)})$ é vettore tangente a Γ_27 in $(1,2)$ e $< f_x(1,2), f_y(1,2), (1, -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)}) = 0$, riconosciamo che $\nabla f(1,2) = (-102, 90)$ é vettore normale a Γ_27 in $(1,2)$.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_9 ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4 Siccome $f(x,y,z) = \frac{x^2yz^{\frac{4}{3}}}{x^4+y^2+z^4}, \quad , f(0,0,0) = 0$ é nulla lungo gli assi coordinati, le derivate parziali in f_x, f_y, f_z sono tutte nulle in $(0,0,0)$. Poi, $\frac{1}{t}f(tx,ty,tz) = t^{\frac{2}{3}} \frac{x^2yz^{\frac{2}{3}})}{t^2x^4+y^2+t^2z^4} \to_{t\to 0} 0$, le derivate direzionali in $(0,0,0)$ sono tutte nulle.

Infine, siccome le derivate perziali in zero sono tutte nulle, differenziabilitá in zero equivale a dire che $\frac{x^2yz^{\frac{4}{3}})}{(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ tende a zero quando $x^2 + y^2 + z^2$ tende a zero. E in effetti

$$\frac{x^2yz^{\frac{4}{3}})}{(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{(x^4+y^2)z^{\frac{4}{3}})}{2(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{(x^4+y^2)z^{\frac{4}{3}})}{2(x^4+y^2)\sqrt{z^2}} =$$

$= \frac{1}{2}|z|^{\frac{1}{3}} \to 0$ cioé f é differenziabile in zero.