AM2 2006-2007: RECUPERO I ESONERO

TEMA 1.

Siano $f_n \in C(\mathbf{R})$ tali che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ risulti totalmente convergente in $[-R, R]$ $\forall R > 0$. Provare che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n$$

TEMA 2.

Sia $f \in C(\mathbf{R}^n)$. Provare che

$$f(x) \to_{\|x\| \to +\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{x} : \quad f(x) \geq f(\underline{x}) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

TEMA 3.

Sia $r > 0$ il raggio della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Provare che

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < r$$

é $C^\infty((-r, r))$.

TEMA 4

Provare che $\exp(z + w) = \exp(z) \exp w \quad \forall z, w \in \mathbf{C}$.

TEMA 5

Enunciare e dimostrare le formule di Eulero.

ESERCIZIO 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |1 - i^n|^n x^n \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$$

e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza.

ESERCIZIO 2

Sia $t \geq 0$. Calcolare, effettuando un cambio di variabile ed una integrazione per parti,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t + x} dx$$

e stabilire se la convergenza é uniforme.

ESERCIZIO 3

Trasformare, usando le formule di Eulero, l'identitá

$$\frac{1 + z}{2(1 - z)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \qquad z \in \mathbf{C}, \quad \|z\| < 1$$

e dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}$$

ESERCIZIO 4

Sia $f(x, y, z) = \frac{x^2 y^{\frac{1}{7}} z}{x^4 + z^2 + y^4}$, $\quad , f(0, 0, 0) = 0.$

Discutere la continuitá di f in $(0, 0, 0)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

La prima serie ha raggio di convergenza 2 e converge anche in 2 e -2 (serie armonica generalizzata di esponente 2).

La seconda serie ha raggio di convergenza $\frac{1}{2}$ e diverge assolutamente se $|x| = \frac{1}{2}$.

La terza serie ha raggio di convergenza 0 (criterio del rapporto).

ESERCIZIO 2 Posto $nx = y$ e quindi integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{nt+y}dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{(nt+y)^2}dy + \frac{1}{nt} \to_n 0 \quad \forall t > 0$$

perché $\frac{\cos y}{(nt+y)^2} \to_n 0$ uniformemente in $[\delta, +\infty)$ e $|\frac{\cos y}{(nt+y)^2}| \leq \frac{\cos y}{(t+y)^2}$ $\forall n$ (equidominatezza).

Lo stesso cambio di variabile fornisce, se $t = 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{t+x}dx \to \frac{\pi}{2}\chi_{-[0,+\infty)}$. In particolare, la convergenza non é uniforme.

ESERCIZIO 3 $z = r(\cos x + i\sin x) = \exp(ix) \quad \Rightarrow$

$$z^n = \exp(inx) = r^n(\cos(nx) + i\sin(nx))$$

D'altra parte,

$$\frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\frac{[1 + r\cos x + ir\sin x)]\ [1 - r\cos x + ir\sin x)]}{[1 - r\cos x - ir\sin x)]\ [1 - r\cos x + ir\sin x)]} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - r^2 + 2ri\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}\right]$$

Uguagliando i coefficenti dell'immaginario in

$$\frac{1 - r^2 + 2ri\sin x}{2[1 - 2r\cos x + r^2]} = \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos(nx) + i\sin(nx))$$

si ottiene appunto

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

ESERCIZIO 4 $\frac{x^2y^{\frac{1}{7}}z}{x^4+z^2+y^4} \leq \frac{(x^4+z^2)y^{\frac{1}{7}}}{x^4+z^2+y^4} \leq y^{\frac{1}{7}} \to 0$ al tendere di $x^2 + y^2 + z^2$ a zero, e quindi f é continua in $(0, 0, 0)$.