

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007  
Docente: Prof. G. Mancini  
Tutore: Dott. Andrea Agnesse & Filippo Cavallari  
<http://andynaz.altervista.org/>

Tutorato 1 del 25.9.2006

NOTAZIONE:  $\chi_A(\cdot)$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ .

1. Calcolare (se esiste) il limite delle seguenti successioni:

- $a_n = \frac{a^{n-1}}{(n+1)^n}$
- $b_n = \frac{(2n)!}{n^n}$
- $c_n = \left(\frac{n+\log n}{n}\right)^{\log n}$
- $d_n = \frac{n!}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$
- $e_n = \frac{\log(1+n+n^3) - 3 \log n}{n(1 - \cos \frac{1}{n^2})}$

2. Sia  $f_n(x) = k_n \chi_{[0,1]}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , con  $k_n$  una successione dell'esercizio 1 che ammette limite (a scelta); calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

3. Rispondere alle seguenti domande ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ):

- (a) esiste  $f_n$  successione di funzioni tale che  $f_n \in C(A) \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in A$  ma  $f \notin C(A)$ ?
- (b) esiste  $f_n$  successione di funzioni tale che  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in A$  con  $f \in C(A)$  ma  $f_n \notin C(A) \forall n \in \mathbb{N}$ ?
- (c) esiste  $f_n$  successione di funzioni tale che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $A$ ,  $f_n \notin C(A) \forall n \in \mathbb{N}$  ma  $f \in C(A)$ ?

4. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono puntualmente:

- (a)  $f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x - n)$  con  $x \in \mathbb{R}$
- (b)  $f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x - n)$  con  $x \in [-a, a]$ ,  $a > 0$
- (c)  $f_n(x) = 1 - \chi_{[-n,n]}(x)$
- (d)  $f_n(x) = x^{2n} \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$
- (e)  $f_n(x) = x^{2n} \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$
- (f)  $f_n(x) = n \cdot g(nx)$  con  $g(x) = \sin(\pi x) \chi_{[0,1]}$
- (g)  $f_n(x) = \frac{n}{n-1} \chi_{[0,1]}(\frac{x}{n})$

5. Dire se le successioni dell'esercizio 4 convergono uniformemente.