Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: Dott. Andrea Agnesse & Filippo Cavallari
http://andynaz.altervista.org/

Soluzioni del tutorato 1 del 25.9.2006

NOTAZIONE: $\chi_A(\cdot)$ è la funzione caratteristica dell'insieme A.

1.
   - $a_n = \dfrac{a^{n-1}}{(n+1)^n} \leq \dfrac{1}{a}\dfrac{a^n}{n^n} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a}{n}\right)^n \leq \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$
     dove l'ultima maggiorazione è giustificata dal fatto che $\dfrac{a}{n} \to 0$
   - $b_n = \dfrac{(2n)!}{n^n} \to +\infty$
   - $c_n = \left(\dfrac{n+\log n}{n}\right)^{\log n} \to 1$
   - $d_n = \dfrac{n!}{2^n} \sin\frac{n\pi}{2}$ non ha limite
   - $e_n = \dfrac{\log(1+n+n^3) - 3\log n}{n\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)} \to +\infty$

2. Chiaramente, una volta creata la successione $f_n(x)$, abbiamo che $f_n(x) \equiv 0 \to 0$ banalmente $\forall x \in [0,1]^C$; se invece $x \in [0,1]$ allora $f_n(x) = k_n$; $f_n(x)$ converge dunque puntualmente alla funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ k_\infty & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$.

3. (a) si: $A = [0,1]$, $f_n(x) = x^n \in C(A)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \notin C(A)$

   (b) si: $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x) \notin C(A)$, $f(x) \equiv 0 \in C(A)$

   (c) si: $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,1]}(x) \notin C(A)$, $f(x) \equiv 0 \in C(A)$

4. 5. (a) $f_n(x) = 1 \Leftrightarrow 0 \leq x - n \leq 1 \Leftrightarrow n \leq x \leq n+1$, dunque possiamo scrivere per maggiore comodità $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$; facciamo vedere che la successione tende puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$:
   fissato $x < 0$, ovviamente $f_n(x) \equiv 0 \to 0$
   fissato $x \geq 0$, $f_n(x) \equiv 0$ $\forall n > x$, e dunque anche in questo caso il limite è 0.
   Facciamo vedere ora che la convergenza non è uniforme: basta notare che $\forall n$ si ha che $\sup_x |f_n(x) - f(x)| = 1$ (per esempio in $x = n + \frac{1}{2}$).

(b) $f(x) \equiv 0$ e in questo caso la convergenza è uniforme perché $f_n(x) \equiv 0 \; \forall n > a$

(c) $f(x) \equiv 1$ e la convergenza non è uniforme

(d) $f(x) \equiv 0$ e la convergenza è uniforme

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ e la convergenza non è uniforme

(f) $f(x) \equiv 0$ e la convergenza non è uniforme

(g) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e la convergenza non è uniforme