Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: Dott. Andrea Agnesse & Filippo Cavallari
http://andynaz.altervista.org/

Soluzioni del tutorato 3 del 23.10.2006

1. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n^5}$: abbiamo in questo caso che $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{-5}} \to 1$ e dunque $r = 1^{-1} = 1$; se poi $x = 4$ o $x = 6$ la serie converge banalmente.
L'intervallo di convergenza è dunque $[4, 6]$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-4)^n$: in questo caso $a_n = n!$ e $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$, e dunque l'intervallo di convergenza è $\{4\}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(\frac{3x}{7} - 1\right)^n$: qui bisogna fare attenzione a chi è a_n; infatti dobbiamo prima riscrivere la serie come $\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(\frac{3}{7}\right)^n\left(x - \frac{7}{3}\right)^n$ per avere il giusto intervallo di convergenza: $\{\frac{7}{3}\}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+10)^n}{6^n}$: $(-16, -4)$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$: $r = \frac{1}{e}$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$: $[-2, 2)$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n2^n}x^n$: $[-2, 2)$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt{n+3}}$: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n + 9^n}$: $(-9, 9)$.

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 x^n}{(n+1)!}$: $(-\infty, +\infty)$.

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + n^5}{(1+n)^7} \left(\frac{3x + 12}{7} \right)^n$: $[-4 - \frac{7}{3}, -4 + \frac{7}{3}]$.

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$: in questo caso abbiamo che $\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + (-1)^n$ il cui limite non esiste. Sfruttando però la definizione possiamo comunque scrivere che $r = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\limsup(2 + (-1)^n)} = \dfrac{1}{3}$.

Ricordo che, data una successione $\{a_n\}$, $\limsup a_n = \lim\limits_m \sup\limits_{n>m} a_m$.

2. $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_0^1 x^{2n} dx}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}$, dove lo scambio tra segno di integrale e quello di serie è possibile in quanto c'e' convergenza uniforme nell'intervallo $[0, 1]$.