I Esonero di AM3 - 13/4/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
La curva γ ha la seguente parametrizzazione $\gamma = (\theta^2 \cos\theta, \theta^2 \sin\theta)$, $\theta \in [0, \frac{2}{3}]$. Quindi $|\dot{\gamma}| = \theta\sqrt{4+\theta^2}$ e

$$l(\gamma) = \int_0^{\frac{2}{3}} \theta\sqrt{4+\theta^2} = \frac{1}{3}(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{80}{81}\sqrt{10} - \frac{8}{3}.$$

Similmente, con un'integrazione per parti si calcola l'integrale curvilineo:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds &= \int_0^{\frac{2}{3}} \theta^3\sqrt{4+\theta^2} = \frac{\theta^2}{3}(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{2}{3}} \theta(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left[\frac{\theta^2}{3}(4+\theta^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(4+\theta^2)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{2}{3}} = -\frac{320}{243}\sqrt{10} - \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 2
a) La funzione $f(x,y,z)$ è continua in $P = (0,0,0)$:

$$|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = |f(x,y,z)| \le \frac{|x|y^2|z|}{1-\cos x + y^2 + \sin^2 z} \le |xz| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0).$$

Poiché $f(x,y,z) = 0$ quando una delle componenti è nulla, abbiamo che

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0).$$

Mostriamo ora che la funzione $f(x,y,z)$ è differenziabile nell'origine:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x,y,z) - f(0,0,0) - < \nabla f(0,0,0), (x,y,z) > |}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{|f(x,y,z)|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{|xz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\le |x| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0). \end{aligned}$$

b) Scrivendo esplicitamente il gradiente di f per punti $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ vicini all'origine, procedendo come per la continuitá di f, è facile mostrare che

$$\nabla f(x,y,z) \to \nabla f(0,0,0) = (0,0,0) \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0).$$

Quindi, $f \in C^1(P)$.
c) Sia $h(t)$ la funzione cosí definita:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\dot{h}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2}, \quad \dot{h}(t) = \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2} \to \frac{1}{2} \text{ per } t \to 0,$$

la funzione $h(t)$ è $C^1(\mathbb{R})$. Quindi, la funzione $g(x,y,z) = h(f(x,y,z))$ è $C^1(P)$ e vale:

$$\nabla g(0,0,0) = \dot{h}(f(0,0,0))\nabla f(0,0,0) = (0,0,0).$$

Esercizio 3
a) Sia $p_0 = (0,0,0)$. Calcoliamo prima di tutto

$$\nabla F(x,y,z) = \left((y+1)\cos x + \frac{e^z}{x+1}, \sin x - z\sin y, \cos y + e^z \ln(1+x) \right).$$

Allora $F(p_0) = 0$ e $\nabla F(p_0) = (2,0,1)$. Quindi $\partial_x F(p_0) = 2$ è invertibile con inverso $T = \frac{1}{2}$. Possiamo applicare il Teorema della Funzione Implicita e trovare una mappa $g(y,z) : B_r(0,0) \to B_\rho(0)$, per $r, \rho > 0$ piccoli, che descrive localmente in p_0 l'insieme $\{F = 0\}$ come il grafico $\{(g(y,z), y, z) : (y,z) \in B_r(0,0)\}$. Per trovare esplicitamente $\frac{1}{2} > r, \rho > 0$, osserviamo che:

$$\sup_{|(y,z)|<r} |F(0,y,z)| = \sup_{|(y,z)|<r} |z\cos y| \le r \le \frac{\rho}{2|T|}$$

per $r \le \rho$. Dobbiamo inoltre imporre

$$\sup_{|x|<\rho, |(y,z)|<r} |1 - \frac{1}{2}(y+1)\cos x - \frac{1}{2}\frac{e^z}{x+1}| \le \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Supponendo $\rho \le \frac{1}{2}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} |1 - \frac{1}{2}(y+1)\cos x - \frac{1}{2}\frac{e^z}{x+1}| &\le \frac{1}{2}|1-\cos x| + \frac{1}{2}|y\cos x| + \frac{1}{2}|\frac{x+1-e^z}{x+1}| \le \frac{|x|+|y|}{2} + |x+1-e^z| \\ &\le 2|x| + |y| + 3|z| \end{aligned}$$

poiché $x + 1 \ge 1 - |x| \ge 1 - \rho \ge \frac{1}{2}$ per $|x| \le \rho$. Allora (1) vale non appena $2\rho + 4r \le 6\rho \le \frac{1}{2}$. Basta quindi prendere $\rho = r = \frac{1}{12}$.
b) Abbiamo $g(0,0) = 0$. Poiché F ammette derivate ad ogni ordine continue sul proprio dominio di definizione, dal Teorema della Funzione Implicita segue che $g \in C^\infty(B_r(0,0))$.
Poiché

$$(y+1)\sin g(y,z) + z\cos y + e^z \ln(1 + g(y,z)) \equiv 0 \quad \text{in } B_r(0,0),$$

derivando in y e z otteniamo:

$$\sin g + (y+1) g_y \cos g - z\sin y + e^z \frac{g_y}{1+g} \equiv 0, (y+1) g_z \cos g + \cos y + e^z \ln(1+g) + e^z \frac{g_z}{1+g} \equiv 0 \quad \text{in } B_r(0,0).$$

Calcolando in $(0,0)$ abbiamo che in particolare vale: $\nabla g(0,0) = (0, -\frac{1}{2})$. Derivando ulteriormente in y e z e calcolando in $(0,0)$ otteniamo che

$$g_{yy}(0,0) = 0\,, \quad g_{yz}(0,0) = \frac{1}{4}\,, \quad g_{zz}(0,0) = \frac{5}{8}.$$

Quindi, lo sviluppo di Taylor di $g(y,z)$ in $(0,0)$ sará:

$$g(y,z) = -\frac{z}{2} + \frac{yz}{4} + \frac{5}{16}z^2 + O(|(y,z)|^3).$$

Esercizio 4
a) L'insieme A non è chiuso e neanche limitato. Infatti, la successione $(2\pi n, \frac{1}{n}) \in A$ è illimitata.
b) Chiaramente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
c) Poiché $f > 0$ in $\mathbb{R}^2$, dal punto (b) otteniamo

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$$

che non viene mai raggiunto. Sempre dal punto (b) segue che la funzione $f(x, y)$ raggiunge massimo in $\bar{A}$. Determiniamo ora il punto di massimo assoluto di f in $\bar{A}$. Studiamo i punti critici liberi:

$$\nabla f(x, y) = -\frac{2}{(x^2 + y^2)^2}(x, y) = (0, 0) \text{ se e solo se } x = y = 0.$$

Non essendo l'origine un punto di A, tale punto deve essere scartato. Studiamo i punti critici vincolati:

$$\nabla f(x, y) = -\frac{2}{(x^2 + y^2)^2}(x, y) = \lambda(1 + \frac{1}{2}\cos(xy))(y, x).$$

Riassorbiamo i fattori $-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}$ e $1+\frac{1}{2}\cos(xy)$ nel moltiplicatore λ, ponendo $\beta = -\frac{\lambda}{2}(1+\frac{1}{2}\cos(xy))(x^2+y^2)^2$. Dobbiamo quindi studiare il sistema:

$$x = \beta y\ ,\ \ y = \beta x\ ,\ \ (x, y) \in \partial A.$$

Poiché $(0, 0) \notin \partial A$, $\beta, x, y \neq 0$. Allora $x^2 = \beta xy = y^2$ e $x = \pm y$. Essendo $(x, -x) \notin \partial A$, otteniamo che i punti critici vincolati P_0 sono della forma (x_0, x_0), ove x_0 deve soddifare

$$g(x_0^2) = x_0^2 + \frac{1}{2}\sin(x_0^2) = \pi$$

in modo tale che $P_0 \in \partial A$. Dal suggerimento, l'unica soluzione è $x_0^2 = \pi$. Quindi, $P_0 = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ è l'unico punto critico vincolato di $f(x, y)$ su ∂A. Abbiamo allora

$$\max_{\bar{A}} f = f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \frac{1}{2\pi}.$$

Siccome $f < \frac{1}{2\pi}$ in A e

$$f(\sqrt{\pi} + \frac{1}{n}, \sqrt{\pi}) \to \frac{1}{2\pi} \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

ove $P_n = (\sqrt{\pi} + \frac{1}{n}, \sqrt{\pi}) \in A$, otteniamo che

$$\sup_A f = \frac{1}{2\pi}$$

e non è mai raggiunto in A.