II Esonero di AM3 - 1/6/2007

1) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$\ddot{y} - y = \sqrt{1 + e^x}.$$

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = -x - y \\ x(0) = 1 \,, \;\; y(0) = 0. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{xy}{1+y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

ove $E = \{0 \le z \le \frac{\pi}{2} \,,\; 0 \le y \le \sqrt{x} \,,\; z \le x + z \le \frac{\pi}{2}\}$.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_E e^{xy} \ln^3 x\, dx\, dy,$$

ove E è l'insieme delimitato dalle rette $x = 1$, $x = e^3$ e dalle curve $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{\ln x}{x}$.

5) Sia

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi\eta)}{\xi} & \text{se } \xi \neq 0 \\ \eta & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

Provare che $\omega = \varphi(x, y)dx + \varphi(y, x)dy$ è esatta.

6) Verificare la validitá del Teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{2x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x}{2x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{2x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

sulla superficie

$$S = \{(x, y, z) :\; 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,,\; z > 0\}.$$