AM3 - Soluzioni Esercitazione 2
15 marzo 2007

1) Poiché $f(x,0) = f(0,y) = 0 \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo che le derivate parziali di f in $(0,0)$ esistono e si ha: $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Abbiamo che

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||\ln(1+y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |\ln(1+y)| \to 0$$

se $(x,y) \to (0,0)$. Quindi, f è differenziabile nell'origine.

2) Osserviamo che

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2 + y + z^2 = 0\,, \quad \lim_{(0,y,z)\to(0,0,0)} \sin y + z^3 = 0.$$

Quindi $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 = f(0,0,0)$.
Abbiamo problemi in punti della forma $(0,y,z)$. Poiché $y \to f(0,y,z) = \sin y + z^3$, la derivata di $f(0,y,z)$ in y è data semplicemente da $\partial_y f(0,y,z) = \cos y$. Analogamente, otteniamo $\partial_z f(0,y,z) = 2z$.
Il problema nasce dalla derivata in x in punti $(0,y,z)$. Infatti, per $h \neq 0$ abbiamo:

$$\frac{f(h,y,z) - f(0,y,z)}{h} = \frac{h^2 + y + z^2 - \sin y - z^3}{h}.$$

Il limite di tale quantitá per $h \to 0$ esiste se e solo se $y = z = 0$. Quindi, $\partial_x f(0,0,0) = 0$ e la funzione f risulta non ammettere derivata parziale in x nell'insieme $\{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0,0,0)\}$. Quindi $\nabla f(0,0,0) = (0,1,0)$.
Poiché la funzione f non ammette derivate parziali in un intorno completo dell'origine, non ha senso mostrare la continuitá di tali derivate nell'origine. Usiamo invece la definizione. Abbiamo che:

$$\Delta(x,y,z) = \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - < \nabla f(0,0,0), (x,y,z) >}{|(x,y,z)|} = \begin{cases} \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\sin y + z^3 - y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{x^2+z^2} \to 0 \quad \text{se } (x,y,z) \to (0,0,0)$$

e

$$\frac{|\sin y + z^3 - y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{|\sin y - y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{|z|^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq |\frac{\sin y}{y} - 1| + z^2 \to 0 \quad \text{se } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

otteniamo che $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |\Delta(x,y,z)| = 0$. Quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0,0)$.

3) Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\})$. Su $\{y=0\}$ abbiamo che $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^+,z_0)} f(x,y,z) = x_0$. Inoltre, $f(0,y,z)=0$ per $y<0$ e vale il seguente limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^-,z_0),x\neq 0} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^+,z_0),x\neq 0} x\frac{e^{xy}-1}{xy} = x_0 \lim_{s\to 0}\frac{e^s-1}{s} = x_0.$$

Quindi, $f \in C(\mathbb{R}^3)$.
Abbiamo che:
- se $y>0$ $\partial_x f = 1+xy$, $\partial_y f = \frac{1}{2}x^2 + 2z^2 y$ e $\partial_z f = 2zy^2$;
- se $y<0$ $\partial_x f = e^{xy}$, $\partial_y f = \frac{xye^{xy}-e^{xy}+1}{y^2}$ e $\partial_z f = 0$.

Calcoliamo ora, usando la definzione, le derivate parziali di f su $\{y=0\}$:

$$\partial_x f(x_0,0,z_0) = 1,\ \partial_z f(x_0,0,z_0) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0,h,z_0)-f(x_0,0,z_0)}{h} \qquad &= \frac{x_0^2}{2} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0,h,z_0)-f(x_0,0,z_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{x_0 h}-1-hx_0}{h^2} = \partial_y f(x_0,0,y_0).\end{aligned}$$

Allora f é differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^3$.
Come per la continuitá, distinguendo i limiti per $y>0$ e $y<0$, è possibile dimostrare la continuitá delle derivate parziali. Quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
E' da notare che i valori delle funzioni derivate parziali in $(x_0,0,z_0)$ sono definiti come limiti dei rapporti incrementali e non come limiti delle derivate parziali per $(x,y,z)\to(x_0,0,z_0)$. Solo a posteriori, tali limiti coincidono.