GE2 - Tutorato III (Prova d'esonero)

Chiara Del Vescovo

9 novembre 2006

1. (a) Sia b una forma bilineare simmetrica su V spazio vettoriale reale n-dimensionale. Sia $\mathbb{E}$ una base di V e sia A la matrice di b rispetto ad $\mathbb{E}$. Dimostrare che A è definita positiva (e quindi b è un prodotto scalare) se gli n minori principali di A sono positivi.

   (b) Sia b_a la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$, definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ dalla matrice:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Determinare per quali valori di a si ha che b_a in base $\mathbb{E}$ è un prodotto scalare;
   - Posto $a = 1$, trovare una base $\mathbb{F}$ diagonalizzante per b;
   - Posto $a = 3/2$, ortonormalizzare con l'algoritmo di Gram-Schmidt i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

     rispetto alla base $\mathbb{E}$.

2. Sia data la famiglia di curve piane reali di equazioni $\mathcal{C}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y^2 = x^3 - ax + b\ \}$ al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Per quali valori di a, b la relativa curva è singolare?

   (b) Siano $a = 3$ e $b = 2$; verificare che i punti $P_1 = (1, 0), P_2 = (2, 2), P_3 = (2, -2)$ appartengono alla curva $\mathcal{C}_{3,2}$;

   (c) Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$; calcolare inoltre il determinante dell'applicazione lineare ϕ associata a f.