GE2 - Tutorato I

Chiara Del Vescovo

11 ottobre 2006

1. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere l'espressione di b e della sua forma quadratica associata Q in base $\mathbb{E}$;

   (b) Calcolare il rango di b;

   (c) Utilizzando l'algoritmo di Lagrange, determinare una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$ b-diagonalizzante.

2. Sia Q la forma quadratica avente, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$, espressione $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.

   (a) Scrivere la matrice $\mathcal{A}$ associata a Q;

   (b) Sia b la forma bilineare simmetrica rappresentata dalla matrice $\mathcal{A}$ nella base $\mathbb{E}$; si consideri il sottospazio vettoriale $W = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$, e sia b' la restrizione di b a W. Scrivere la matrice $\mathcal{B}$ di b' in base $\mathbb{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$;

   (c) Si consideri $b' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{B}$ rispetto ad una base $\mathbb{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$; utilizzando l'algoritmo di Lagrange, determinare la segnatura di b' e trovare una base b'-diagonalizzante;

   (d) Determinare le equazioni del cono b'-isotropo rispetto alla base $\mathbb{G}$.

3. Sia $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_4 - x_4y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 2x_3y_4 - 2x_4y_3$ una forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ definita rispetto alla base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$;

   (a) Verificare che b è simmetrica;

   (b) Trovare una base b-diagonalizzante $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^4$;

(c) Verificare in due modi distinti che b è degenere;

(d) Trovare due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ linearmente indipendenti e b-isotropi.

4. (a) Verificare che $\mathbb{Q}[X]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$;

   (b) Verificare che l'applicazione $b_1 : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ così definita: $b_1((p(X), q(X))) := p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica;

   (c) Determinare un vettore $p_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$ $b-$isotropo;

   (d) Determinare un vettore $p_2(X) \in \mathbb{Q}[X]$ $b-$ortogonale a qualsiasi vettore $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$;

   (e) Esiste una forma bilineare simmetrica $b_a : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ t. c. $b_a((p(X), q(X))) = p(a)q(a)$ che non ammette vettori b_a-isotropi? E se $b_a : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$?