AM1 2009-2008: I APPELLO- 21/01/2009

Esercizio 1- Si detrminino estremo superiore e inferiore, ed eventualmente massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

(a) $\left\{ \frac{3n^2}{7n+1} \ : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{n^2-1} \,|\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \right\}$;

(b) $\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Esercizio 2- Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{3n}+3x^2+x\log n}{n^5+log^2 n}$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{3/2}\log(1+\frac{2}{n})}\right)^{\sqrt{n}}$;

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{3n^2}-1}{\cos\frac{1}{n}-1}$;

ricordando i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n+1)}{a_n} = 1; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1; \ \lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{1/a_n} = e; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$$

dove a_n é una successione t. c. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 3- Provare per induzione che $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Esercizio 4- Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $E = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1 \,\} \cup \{\, (\frac{1}{k}) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{\, 0 \,\}\,\}$. Si trovino i punti di accumulazione di E, i punti isolati, i punti interni.
Si trovi la chiusura di E, si stabilisca se E è un insieme chiuso, se è un insieme aperto, se è limitato.
Si trovino $\inf(E \cap \mathbb{R}^+)$, $\sup(E \cap \mathbb{R}^+)$ e si stabilisca se esistono minimo e/o massimo di E.

Esercizio 5- Studiare la convergenza ed eventualmente la convergenza assoluta delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\log(1+\frac{1}{n})}$;

(b) $\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n^2}$;

(c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^\alpha + 2^n}{n^2+3^{n/\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.