

# Am1c – Tutorato X

## Integrali definiti

Martedì 13 Maggio 2009

Filippo Cavallari

**Esercizio 1** Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(1) \int_1^3 |x-2| dx$$

$$(2) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(4) \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$$

$$(5) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(6) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx$$

**Esercizio 2** Sia  $f(x)$  una funzione integrabile nell'intervallo  $[0;5]$  tale che  $\int_0^5 f(x) dx = 10$ .

Dimostrare che:

(a) esiste  $x_0 \in [0;5]$  tale che  $f(x_0) < 3$

(b) se  $f(x)$  è continua in  $[0;5]$  allora esiste  $x_0 \in [0;5]$  tale che  $f(x_0) = 2$

(c) se  $f(x)$  è strettamente monotona in  $[0;5]$  allora esiste  $x_0 \in [0;5]$  tale che  $f(x_0) < 2$

**Esercizio 3** Data una parabola di equazione  $y = ax^2$  con  $a > 0$  e una retta  $r$  parallela all'asse delle  $x$  che giace sul semipiano  $y > 0$ , la superficie  $S$  racchiusa dalla parabola e dalla retta prende il nome di segmento parabolico. Calcolare l'area del segmento parabolico e dimostrare che è equivalente ai  $\frac{2}{3}$  del rettangolo ad esso circoscritto.

**Esercizio 4** Determinare l'area della regione piana delimitata dall'asse  $x$  e dalle due parabole di equazione  $p_1 : y = x^2 + 4x + 4$  e  $p_2 : y = x^2 - 4x + 4$ .

**Esercizio 5** Dimostrare che:

(a) Se  $f$  è pari allora  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  è dispari

(b) Se  $f$  è dispari allora  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  è pari

**Esercizio 6** Mostrare con un esempio che se  $f$  è T-periodica allora  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  può non esserlo. Stabilire eventuali condizioni necessarie e/o sufficienti affinché ciò accada.