Am1c – Soluzioni Tutorato VI

Riepilogo

Mercoledì 1 Aprile 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 (1) Dato che risulta $f(0)=7$ $\lim_{x\to 0^+} 4x^2-3x+7=7$ $\lim_{x\to 0^-} ae^x+c=a+c$ la funzione è continua in $0 \Leftrightarrow a+c=7$. Valutiamo ora il limite del rapporto incrementale da destra e da sinistra:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{4h^2-3h+7-7}{h}=-3 \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{ae^h+(7-a)-7}{h}=a$$

Ne segue che la funzione è derivabile nell'origine per $a=-3$ $c=10$.

(2) Dato che risulta $f(0)=b$ $\lim_{x\to 0^+} a\sinh x+b=b$ $\lim_{x\to 0^-} 4x^2+2x-1=-1$ la funzione è continua in $0 \Leftrightarrow b=-1$. Valutiamo ora il limite del rapporto incrementale da destra e da sinistra:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\sinh h-1+1}{h}=\lim_{h\to 0^+} a\frac{e^h-e^{-h}}{2h}=\lim_{h\to 0^+} ae^{-h}\frac{e^{2h}-1}{2h}=a$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4h^2+2h-1+1}{h}=\lim_{x\to 0^-} 4h+2=2$$

Ne segue che la funzione è derivabile nell'origine per $a=2$ $b=-1$.

Esercizio 2 (1) Uniformemente continua nell'intervallo $[1;+\infty)$ in quanto ha derivata limitata. La funzione è uniformemente continua anche su tutto l'asse reale in quanto è ovviamente uniformemente continua su $(-\infty;-1]$ (ha derivata limitata!) e lo è anche nell'intervallo $[-1;1]$ in quanto è ivi continua.

(2) In $(-1;1)$ la funzione è uniformemente continua per $\alpha \geq 0$ in quanto continua $[-1;1]$ (più precisamente è estendibile per continuità nell'origine nel caso $\alpha \geq 0$). Se $\alpha < 0$ non risulta uniformemente continua in quanto la funzione ha una discontinuità non eliminabile nell'origine.
In $[1;+\infty)$ la funzione è uniformemente continua per $\alpha \leq 1$ in quanto ha derivata limitata. Tuttavia se $\alpha > 1$ la funzione non è uniformemente continua in quanto non è verificato il teorema della farfalla.

(3) Uniformemente continua in $(0;1)$ per $\alpha > 0$ in quanto è estendibile ad una funzione continua su tutto l'intervallo $[0;1]$. Nel caso $\alpha \leq 0$ questo non è possibile quindi non è neanche uniformemente continua. Invece, nell'intervallo $[1;+\infty)$, è uniformemente continua se $\alpha < 0$, in quanto ha un asintoto orizzontale; se $0 \leq \alpha < 1$ è uniformemente continua in quanto ha derivata limitata; se $\alpha = 1$ è uniformemente continua $\forall \beta \leq 0$ in quanto ha derivata limitata, mentre per $\beta > 0$ non lo è in quanto non vale il teorema della farfalla. Infine se $\alpha > 1$ la funzione non è uniformemente continua in quanto non è verificato il teorema della farfalla.

(4) Uniformemente continua in $(-\infty;1)$ per $\alpha \geq 0$ per il teorema dell'asintoto. Per $\alpha < 0$ non è uniformemente continua perché non è verificato il teorema della farfalla. Analogamente in $[1;+\infty)$ è uniformemente continua per $\alpha \leq 0$ mentre non lo è per $\alpha > 0$.

Esercizio 3 Dato che il polinomio è di grado pari $n \geq 2$ e $a_n > 0$ segue che $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. Da questo segue che esistono $\alpha < 0 \quad \beta > 0$ tali che $P(\alpha) > 0 \quad P(\beta) > 0$. Ora poiché $P(0) = a_0 < 0$ la tesi segue applicando il teorema di esistenza degli zeri agli intervalli $[\alpha;0] \quad [0;\beta]$.

Esercizio 4 Posto $f(t) = \frac{t}{1+t}$ si ha che $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \quad \forall t \geq 0$. Ne segue che la funzione è crescente $\forall t \geq 0$. Ricordando la disuguaglianza triangolare, $|a+b| \leq |a| + |b|$, ne segue che $f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$ e cioè

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}.$$

Osserviamo ora che $1+|a|+|b| \geq 1+|a|$ e $1+|a|+|b| \geq 1+|b|$, pertanto si ha

$$\frac{1}{1+|a|+|b|} \leq \frac{1}{1+|a|}, \quad \frac{1}{1+|a|+|b|} \leq \frac{1}{1+|b|}$$

da cui si ottiene

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

cioè la tesi.

Esercizio 5 (1) Posto $f(x) = \frac{1}{\sin x} + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$ si ottiene $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\frac{\pi}{3}$ e $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) Posto $f(x) = x + \sin x - 2(e^x - 1)$ si ottiene $f(0) = 0$ e $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$.

(3) Posto $f(x) = x^{x-1}$ si ha $f(1) = 1$. Se $x > 1$ allora $x - 1 > 0$ e quindi $f(x) = x^{x-1} > 1$. Analogamente se $x < 1$ allora $x - 1 < 0$ e quindi $f(x) = x^{x-1} > 1$.