

Am1c – Soluzioni Tutorato VII

Integrali per sostituzione e per parti

Mercoledì 22 Aprile 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1

$$(1) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = [t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx] = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$$(2) \int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin x| + c$$

$$(3) \int \pi^x dx = \int e^{x \ln \pi} dx = [t = x \ln \pi \Rightarrow dt = \ln \pi dx] = \frac{1}{\ln \pi} \int e^t dt = \frac{1}{\ln \pi} e^t + c = \frac{\pi^x}{\ln \pi} + c$$

$$(4) \int \frac{10x^4 + 12x^3 - 8}{2x^5 + 3x^4 - 8x} dx = [t = 2x^5 + 3x^4 - 8x \Rightarrow dt = (10x^4 + 12x^3 - 8) dx] \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|2x^5 + 3x^4 - 8x| + c$$

$$(5) \int \frac{1}{x \ln x} dx = [t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c$$

$$(6) \int \frac{1}{\cos x \sin x} dx = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = [t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\tan x| + c$$

$$(7) \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int t^2 (1 - t^2) dt \\ = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

$$(8) \int \frac{\sin^8 x}{\tan x} dx = \int \sin^7 x \cos x dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + c = \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

$$(9) \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c = \arctan(\sin x) + c$$

$$(10) \int e^{3x} \sqrt{1 + e^{3x}} dx = [t = e^{3x} + 1 \Rightarrow dt = 3e^{3x} dx] = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} \sqrt{t^3} + c = \frac{2}{9} \sqrt{(e^{3x} + 1)^3} + c$$

$$(11) \int \frac{1}{1 + e^x} dx = [x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}] = \int \frac{1}{(1+t)t} dt = \int \frac{1+t-t}{(1+t)t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c$$

$$(12) \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right] = 2 \int \frac{\ln t}{t} dt = \left[u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t} \right] \\ = \int 2u du = u^2 + c = \ln^2 t + c = \ln^2 \sqrt{x} + c$$

$$(13) \int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx = \left[t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx \right] = 2 \int \frac{1-t^2}{1+t} t dt = 2 \int (1-t) t dt = t^2 - \frac{2}{3} t^3 + c = x - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$(14) \int x(3x^2 - 7)^{11} dx = \left[t = 3x^2 - 7 \Rightarrow dt = 6x dx \right] = \frac{1}{6} \int t^{11} dx = \frac{t^{12}}{72} + c = \frac{(3x^2 - 7)^{12}}{72} + c$$

$$(15) \int \frac{x^2}{\arcsin x^3 \sqrt{1-x^6}} dx = \left[t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\arcsin t \sqrt{1-t^2}} \\ = \left[u = \arcsin t \Rightarrow du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + c = \frac{1}{3} \ln|\arcsin t| + c = \frac{1}{3} \ln|\arcsin x^3| + c$$

$$(16) \int \frac{1}{x+x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \left[t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \right] = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c = \arctan \ln x + c$$

$$(17) \int \frac{\tan^2 \sqrt{x} + \tan^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right] = 2 \int \tan^2 t + \tan^4 t dt = 2 \int \tan^2 t (1 + \tan^2 t) dt \\ = \left[u = \tan t \Rightarrow du = (1 + \tan^2 t) dt \right] = 2 \int u^2 du = \frac{2}{3} u^3 + c = \frac{2}{3} \tan^3 t + c = \frac{2}{3} \tan^3 \sqrt{x} + c$$

$$(18) \int \frac{\ln(\arctan x)}{\arctan x(1+x^2)} dx = \left[t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2} \right] = \int \frac{\ln t}{t} dt = \left[u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t} \right] \\ = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 t}{2} + c = \frac{\ln^2 \arctan x}{2} + c$$

Esercizio 2 Ovviamente $\int dx = x + k$. Supponiamo ora che $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$ per un n fissato, e mostriamo che è valido per $n+1$. Integrando per parti si ha:

$$\int x^{n+1} dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} dx$$

Quindi:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \int x^{n+1} dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} x + k$$

Da cui, infine:

$$\int x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} x^{n+2} + k$$

Esercizio 3

$$(1) \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \\ \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

$$(2) \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \\ \Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$

$$(3) \int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - \int 6x \sin x dx = \\ = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - \int 6 \cos x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

$$(4) \int x^4 e^x dx = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + \int 12x^2 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - \int 24x e^x dx = \\ = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + c$$

$$(5) \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$(6) \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + c$$

$$(7) \int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$(8) \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x(\ln x + 1) + c$$

Esercizio 4 (1) Integrando per parti si ottiene

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx$$

Quindi posto $S_n = \int \sin^n x dx$ si ottiene che:

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

Ora poiché $S_0 = x + k$ $S_1 = -\cos x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni n la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se n è pari e C_1 se n è dispari.

(2) Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \cos^n x dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx\end{aligned}$$

Quindi posto $C_n = \int \cos^n x dx$ si ottiene che:

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}$$

Ora poiché $C_0 = x + k$ $C_1 = \sin x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni n la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se n è pari e C_1 se n è dispari.