Cognome e nome ____________________

APPELLO B AM1C
14 LUGLIO 2009

Esercizio 1.
Sia data la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{\log x}} \quad .$$

(a) Determinarne: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, eventuali massimi, minimi e punti di flesso, intervalli di convessità. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Scrivere l'equazione della retta tangente a f nel punto di ascissa $x_0 = e$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B AM1C
14 LUGLIO 2009

Esercizio 2.
(a) Sia $f(x) = \log x + \sqrt{x}$. Discutere l'uniforme continuità di f nei seguenti intervalli: $(0, 3), [3, 5], [5, +\infty)$.

(b) Sia $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa le ipotesi del lemma della farfalla. Mostrare con un esempio che ciò non fornisce una condizione sufficiente per l'uniforme continutà.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B AM1C
14 LUGLIO 2009

Esercizio 3.
Determinare un polinomio che approssimi la funzione $f(x) = x\cos(2x)$ nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B AM1C
14 LUGLIO 2009

Esercizio 4.
(a) Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x\cos(\log(1+x)) - \sin(2x)}{x^\alpha(e^x - 1)} dx \quad .$$

(b) Determinare l'insieme delle primitive della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}(x+2)} \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO B AM1C
14 LUGLIO 2009

Esercizio 5.
(a) Stabilire il numero delle soluzioni su $\mathbb{R}$ della seguente equazione

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - x \quad .$$

(b) Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ la derivabilità della seguente funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-t^2} dt & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(ax) + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1 Soluzioni

Esercizio 1
(a) Dom(f)=$(0,1)\cup(1,+\infty)$ e $f(x)>0 \quad \forall x$.
Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=[1e^{-\infty}]=0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=[1e^{+\infty}]=+\infty$$

la retta $x=1$ è l'unico asintoto verticale (destro) di f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

f potrebbe ammettere asintoto obliquo, studiamo il limite, utilizzando il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{\log(x)}}-1)}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\log x}}\frac{x}{\log^2 x}=+\infty$$

perché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\log x}=0$, quindi f non ammette asintoto obliquo.
Ricerca di massimi e minimi relativi, intervalli di monotonia:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\log x}}\frac{\log^2 x-1}{\log^2 x}$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \log x=\pm 1 \Leftrightarrow x=e, x=\frac{1}{e} \quad .$$

Il punto $M=(\frac{1}{e},\frac{1}{e^2})$ è un massimo relativo e il punto $m=(e,e^2)$ è un minimo relativo. f è crescente in $(0,\frac{1}{e})\cup$

$(e, +\infty)$. $\mathrm{Dom}(f') = (0,1) \cup (1, +\infty)$.
Intervalli di convessità, punti di flesso:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\frac{1}{\log x}} \frac{-\log^2 x + 2\log x + 1}{x \log^4 x} \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = e^{1 \pm \sqrt{2}} \end{aligned}$$

che sono i due punti di flesso per f. La funzione è convessa negli intervalli in cui $f''(x) > 0$ e cioè per $x \in [e^{1-\sqrt{2}}, 1) \cup (1, e^{1+\sqrt{2}}]$.

(b) Essendo $f'(e) = 0$, la retta tangente a f in $(e, f(e))$ ha equazione $y = e^2$.

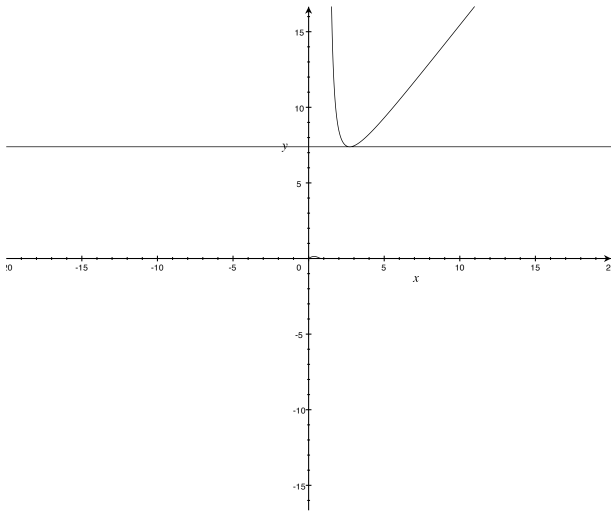

Figura 1: I grafici di $y = xe^{\frac{1}{\log x}}$ e di $y = e^2$

Esercizio 2

(a) In $(0,3)$ f non è U.C. essendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. In $[3,5]$ f è U.C. per il teorema di Heine Cantor. In $[5, +\infty)$ f è U. C. poiché è derivabile con derivata limitata ($f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ per $x \to +\infty$).

(b) Ad esempio $f(x) = \cos(x^2)$, pur non essendo uniformemente continua è tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\cos(x^2)| \leq A|x| + B$$

con $A = 0$ e $B = 1$.

Esercizio 3

Il polinomio di Maclaurin di $x\cos(2x)$ di ordine n è il prodotto dei polinomi di Taylor di x e di $\cos(2x)$, cioè

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k+1}}{(2k)!}$$

e, utilizzando il resto $n+1$-esimo di Lagrange, è della forma

$$R_{n+1}(\xi) = R_{n+1} = \frac{(-1)^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+3}$$

Osservazione 1 *Possiamo considerare il resto R_{n+1} invece di R_n perché $x\cos(2x)$ è una funzione dispari.*

Dobbiamo valutare qual è il più piccolo numero n per il quale risulti

$$|R_{n+1}| < 10^{-3} \text{ nell'intervallo considerato .}$$

Ora $|f^{(2n+2)}(\xi)| = 2^{2n+2}\cos(\xi)$ e quindi $|f^{(2n+2)}(\xi)| \leq 2^{2n+2}$. Nell'intervallo dato $x \leq \frac{1}{2}$ e dunque

$$|R_{n+1}| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)! 2^{2n+3}} < 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 2 \quad (2 \cdot 6! > 1000).$$

Il polinomio cercato è dunque

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k+1}}{(2k)!} = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 \quad .$$

Esercizio 4

(a) Spezziamo il dominio di integrazione in due intervalli e studiamo separatamente la convergenza dei due integrali:

$$\int_0^1 \frac{2x\cos(\log(1+x)) - \sin(2x)}{x^\alpha(e^x - 1)}dx \tag{1.1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x\cos(\log(1+x)) - \sin(2x)}{x^\alpha(e^x - 1)}dx \tag{1.2}$$

Per quanto riguarda (1.1), studiamo il comportamento asintotico vicino lo 0 della funzione integranda utilizzando il suo sviluppo di Mclaurin (e osservando che $f > 0$ in un intorno destro dello 0):

$$\frac{2x\cos(\log(1+x)) - \sin(2x)}{x^\alpha(e^x - 1)} \sim \frac{2x - x^3 - 2x + \frac{8x^3}{3!}}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}} \quad .$$

Per il teorema del confronto degli integrali impropri, (1.1) converge se e solo se $\alpha < 3$. Per quanto riguarda (1.2), in un intorno di $+\infty$ studiamo la convergenza assoluta dell'integrale.

$$\left|\frac{2x\cos(\log(1+x)) - \sin(2x)}{x^\alpha e^x}\right| \leq \frac{2x+1}{x^\alpha e^x} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}e^x}$$

e l'integrale di questa funzione converge per ogni valore di α, perché definitivamente abbiamo che

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}e^x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_1^{+\infty} x^{-2} < +\infty \quad .$$

L'integrale dato quindi converge per ogni $\alpha < 3$.
(b) Ponendo $\sqrt{x} = t$, risulta essere

$$\int f(x)dx = 2\int \frac{t^4}{t+2}dt = 2\int (t^2-2)dt + 2\int \frac{4}{t^2+2}dt$$

essendo $\frac{t^4}{t^2+2} = t^2-2+\frac{4}{t^2+2}$ e dunque, integrando e tornando alla variabile x, otteniamo l'insieme delle primitive di $f(x)$:

$$F(x,C) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}} + C \quad .$$

Esercizio 5
(a) Sia $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt - 1 + x$ e cerchiamo il numero delle radici di $f(x)$. Poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt < +\infty$, segue che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

dunque f ammette almeno una radice, che chiamiamo x_0. Dallo studio del segno della derivata prima di f ($f'(x) = e^{-x^2} + 1 > 0 \quad \forall x$), si ha che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e dunque x_0 è l'unica radice di f.
(b) Studiamo la continuità e la derivabilità di $\tilde{f}$ in 0. C.N: continuità nello 0 (in tutti gli altri punti di $\mathbb{R}$ $\tilde{f}$ è derivabile perchè somma e composizione di funzioni C^∞).

$$\lim_{x\to 0^-} \sin(ax) + b = \tilde{f}(0) \Leftrightarrow b = 0$$

Derivabilità in 0:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(ah)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h e^{-t^2}dt}{h} = \lim_{h\to 0^+} e^{-h^2}$$

avendo usato per l'ultima uguaglianza il teorema di De L'Hospital. Perciò $\tilde{f}$ è derivabile nello 0 se e solo se $a = 1$ e $b = 0$.