ESERCITAZIONE 2: LE DERIVATE

Tiziana Raparelli

10/03/2008

1 CONOSCENZE PRELIMINARI

Le funzioni circolari inverse

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

è l'inversa di $\sin(x)|_{[-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]}$ ($\Leftrightarrow \arcsin(\sin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x$, $\forall x$).

$$\arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

è l'inversa di $\cos(x)|_{[0,\pi]}$.

$$\arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

è l'inversa di $\tan(x)|_{(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}$.

$\arcsin(x), \arccos(x)$ e $\arctan(x)$ sono funzioni continue nel loro dominio in quanto funzioni inverse di funzioni continue su un intervallo.

Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\sinh(-x) = -\sinh(x) \\
&\cosh(-x) = \cosh(x) \\
&\sinh x + \cosh(x) = e^x \\
&\cosh(x) > \sinh(x) \\
&(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1 \\
&(\sinh x)' = \cosh x \\
&(\cosh x)' = \sinh x \\
&\sinh(0) = 0 \quad , \quad \cosh(0) = 1 \quad .
\end{aligned}$$

Definizione 1.1. *$x_0 \in Dom(f)$ si dice punto angoloso per f se f non è derivabile in quel punto e $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}, f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ (con $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$).*

Definizione 1.2. *$x_0 \in Dom(f)$ è punto di cuspide per f se f non è derivabile in x_0 e almeno uno dei due limiti $\lim_{x\to x_0^+} R_{f(x_0)}$, $\lim_{x\to x_0^-} R_{f(x_0)}$ vale $\pm\infty$. Nel caso in cui entrambi questi limiti siano infiniti devono avere segno opposto. ($R_{f(x_0)}$ è il rapporto incrementale della funzione in x_0.)*

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Dimostare, applicando la definizione di derivata, e le regole di derivazione, che valgono le seguenti uguaglianze:
1)$(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2)$(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3)$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4)$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$
5)$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
6)$(|x|)' = \frac{|x|}{x} = \text{sign}(x) \quad \forall x \neq 0$
7)$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2
Dimostrare, utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa che valgono le seguenti uguaglianze:
1)$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$
2)$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$

3)$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 3
Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità delle seguenti funzioni e calcolarne la derivata prima.
1)$f(x) = \cos x \log(1-x^2)$
2)$f(x) = \sqrt{|x+1|}$
3)$f(x) = |\log x| + \sinh x$
4)$f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x^2+1}$
5)$f(x) = (\arctan x)^x$.

ESERCIZIO 4
Stabilire se la seguente funzione è derivabile nel suo dominio

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Per le prime 4 si applica la definizione di derivata di una funzione (limite del rapporto incrementale) e si perviene al risultato.
Per es. (3):

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$$

5) Per $n = 0$ e $n = 1$, il risultato segue banalmente. Usiamo il principio di induzione su n: Supponiamo che sia $(x^n)' = nx^{n-1}$, per ogni n, allora

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1)x^n \quad .$$

6) $|x|$ non ammette derivata in 0 perché

$$lim_{h\to 0} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \nexists \left(= \begin{cases} 1 & \text{se } h \to 0^+ \\ -1 & \text{se } h \to 0^- \end{cases} \right)$$

Osservazione 3.1. *0 è un punto angoloso per* $|x|$.

7)

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \quad .$$

ESERCIZIO 2

Si applica il teorema della derivata della funzione inversa, sfruttando la conoscenza delle derivate di $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$. Per quest'ultima, ad esempio: usando la regola di derivazione del rapporto

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad .$$

Quindi, sia $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$, allora

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + (\tan y)^2} = \frac{1}{1 + x^2} \quad .$$

ESERCIZIO 3:

1)

$$Dom(f) = (-1, 1)$$
$$f'(x) = -\sin x \log(1 - x^2) - \frac{2x \cos x}{1 - x^2}$$
$$Dom(f') = (-1, 1)$$

2)

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x+1|}} \frac{|x+1|}{x+1}$$
$$Dom(f') = \mathbb{R}\ \{-1\}$$

e -1 è un punto di cuspide per f.

3)

$$Dom(f) = (0, +\infty)$$
$$f'(x) = \frac{|\log x|}{\log x} \frac{1}{x} + \cosh x$$
$$Dom(f') = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

e 1 è un punto angoloso per f.

4)

$$Dom(f) = \mathbb{R},$$
$$f'(x) = \frac{e^{\sin x}(\cos x(x^2 + 1) + 2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$Dom(f') = \mathbb{R}$$

5)

$$f(x) = e^{x \log(\arctan x)}$$

$$Dom(f) = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = (\arctan x)^x \big(\log(\arctan x) + \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\arctan x}\big)$$

$$Dom(f') = (0, +\infty) \quad .$$

ESERCIZIO 4:

In ogni punto diverso da 0 f è derivabile perché prodotto e composizione di funzioni derivabili. In $x = 0$ bisogna per prima cosa verificare la continuità, cioè che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

che effettivamente è vero.

Per la derivabilità in 0 deve esistere finito il limite del rapporto incrementale di f in 0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)e^{-\frac{1}{|x+h|}}}{h}|_{x=0} = \lim_{h \to 0} e^{-\frac{1}{|h|}} = 0$$

dunque f è derivabile anche in 0.