ESERCITAZIONE 11: FORMULA DI TAYLOR E INTEGRALI IMPROPRI

Tiziana Raparelli

19/05/2009

1 Conoscenze preliminari

Definizione 1.1. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, due funzioni infinitesime per $x \to x_0 \in A$. Diremo che f è un "o piccolo " di g se*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e scriveremo "$f(x) = o(g(x))$".

Proposizione 1.1. *Valgono i seguenti risultati*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty \Leftrightarrow \quad \beta > 1 \quad .$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Calcolare i seguenti numeri con la precisione indicata al loro fianco.
(a)

$$e \qquad , \quad \varepsilon < 10^{-2}$$

(b)

$$\arctan \frac{1}{2} \quad , \quad \varepsilon < 10^{-3} \quad .$$

ESERCIZIO 2
Approssimare $f(x) = \sin(\frac{x}{3})$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ con un polinomio $p(x)$ con un errore

inferiore a 10^{-5}.

ESERCIZIO 3
Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx$$

ESERCIZIO 4
Studiare la convergenza di

$$\text{(a)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx$$
$$\text{(b)} \qquad \int_0^{+\infty} \sin x dx$$

3 Soluzioni

ESERCIZIO 1
(a) e:
In un intorno dell'origine I_0

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{con} \quad \xi \in I_0$$

Passando ai valori assoluti, segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \le |\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}| \quad \forall x \in I_0 \quad .$$

In particolare, per $x = 1$, otteniamo la relazione

$$|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| \le |\frac{e^\xi}{(n+1)!}|$$

dove ξ è un punto dell'intervallo $[0, 1]$. La somma $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ è un'approssimazione di e tanto migliore quanto più grande è n. Per stimare e con l'approssimazione voluta, stimiamo quindi il lato destro della disuguaglianza chiedendoci per quale n la seguente disuguaglianza è soddisfatta

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 10^{-2} \quad .$$

Possiamo maggiorare e^ξ con e^1 e quindi con 3, perciò otteniamo

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

che risulta essere minore di 10^{-2} se e solo se

$$(n+1)! > 300$$

cioè per $n = 5$ $(6! = 720)$. Il numero cercato è dunque dato da

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5}! = 2.717 \quad .$$

(polinomio di Mac Laurin di grado 5 di e^x calcolato per $x = 1$).

(b) $\arctan \frac{1}{2}$:
Ricordiamo la relazione vera $\forall n$:

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$

da cui

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

che per $x = -t^2$ diventa

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \quad . \tag{1}$$

Poiché $\arctan x$ è una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(0) = \arctan \frac{1}{2}$$

e, guardando la (1), segue che

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\frac{1}{2})^{2k+1} \frac{1}{2k+1} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad . \end{aligned}$$

Dunque

$$|\arctan\frac{1}{2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\frac{1}{2})^{2k+1}\frac{1}{2k+1}|\le|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt|\quad .$$

L'ultimo integrale non lo sappiamo calcolare ma lo possiamo maggiorare in valore assoluto nel modo seguente

$$|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt|\le\int_0^{\frac{1}{2}}t^{2n+2}dt=(\frac{1}{2})^{2n+3}\frac{1}{2n+3}$$

che è minore di 10^{-3} se $n\ge 3$. Dunque il numero che approssima $\arctan\frac{1}{2}$ con la precisione cercata è

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(\frac{1}{2})^{2k+1}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{5\cdot 32}-\frac{1}{7\cdot 128}\quad .$$

Osservazione 3.1. *Se avessimo risolto il problema utilizzando la formula di Taylor con il resto di Lagrange avremmo dovuto calcolare la prime* 8 *derivate di* $\arctan x$ *per giungere allo stesso risultato.*

ESERCIZIO 2

Per il teorema di Taylor con resto di Lagrange, nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{2})$ $\exists\xi$ tale che

$$\sin(\frac{x}{3})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)!}+D^{(2n+3)}\sin(\frac{x}{3})\Big|_{x=\xi}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\quad .$$

Osservazione 3.2. *Abbiamo considerato il resto di Lagrange $n+1$-esimo (invece che il resto n-esimo) perché il polinomio di Mac Laurin di* $\sin t$ *(che è una funzione dispari) ammette solo potenze dispari della x.*

Perciò

$$|\sin(\frac{x}{3})-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)!}|\le|\sin(\frac{\xi}{3})\frac{1}{3^{2n+3}}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}|\quad\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

Poiché in $[0\frac{\pi}{2}]$ si ha che $x<2$ e $0<\sin\frac{\xi}{3}<1$, possiamo stimare il lato destro della disuguaglianza nel modo seguente

$$\sin(\frac{\xi}{3})\frac{1}{3^{2n+3}}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}<(\frac{2}{3})^{2n+3}\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{(2n+3)!}$$

che è minore di 10^{-5} se e solo se $n \geq 3$)(per $n = 3$ si ottiene $9! = 362880$). Perciò il polinomio che stima $\sin(\frac{x}{3})$ con il grado di precisione richiesta è il suo polinomio di Mac Laurin di ordine 3:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)!} = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{3^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{3^7 \cdot 7!} \quad .$$

ESERCIZIO 3

Con la sostituzione $t = e^x$ ci riduciamo a calcolare

$$\lim_{y \to +\infty} \int_e^y \frac{1}{t^3 - 1} dt$$

Poiché $t^3 - 1 = (t-1)(1 + t + t^2)$ cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt + C}{1 + t + t^2}$$

Queste costanti sono $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_e^y \frac{1}{t^3 - 1} dt &= \frac{1}{3}\Big(\int_e^y \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2} \int_e^y \frac{(2t+1) + 3}{t^2 + t + 1} dt\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(\log |\frac{y-1}{e-1}| - \frac{1}{2} \log \frac{1 + y + y^2}{1 + e + e^2} \\
&- \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2e+1}{\sqrt{3}})\Big)
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{y \to +\infty} \int_e^y \frac{1}{t^3 - 1} dt = \frac{1}{3} \lim_{y \to +\infty} \log \frac{y - 1}{\sqrt{1 + y + y^2}} + a \qquad (2)$$

dove

$$a = \frac{1}{3}(\log \frac{\sqrt{1 + e + e^2}}{e - 1} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2e+1}{\sqrt{3}}))$$

e dunque il limite (2), che è il valore dell'integrale dato, è uguale a a.

ESERCIZIO 4

(a) L'integrale dato è improprio sia in un intorno dello 0 sia in un intorno di $+\infty$, lo spezziamo quindi in due integrali

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{3x} - 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{3x} - 1} dx$$

e dobbiamo studiare separatamente la loro convergenza. In un intorno dell'infinito $\frac{e^x}{e^{3x}-1} \sim \frac{1}{e^{2x}}$ che è minore di $\frac{1}{x^2}$. Poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty \quad ,$$

dal teorema del confronto per gli integrali impropri segue che anche

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx < +\infty \quad .$$

Per controllare la convergenza di $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx$, poiché siamo in un intorno dello 0, possiamo approssimare e^x con il suo polinomio di Mac Laurin, e cioè

$$e^x = 1 + x + o(x) \sim 1 \quad , \quad e^{3x} = 1 + 3x + o(x) \quad .$$

Quindi

$$\frac{e^x}{e^{3x-1}} \sim \frac{1}{3x}$$

e poiché

$$\int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$$

segue che anche $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx$ diverge e dunque l'integrale dato diverge.

(b)

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{y \to +\infty} \int_0^y \sin x dx = \lim_{y \to +\infty} (-\cos y + 1)$$

che non esiste, dunque l'integrale dato non esiste.