AM2 2007-2008: I ESONERO

TEMA 1. Sia $f(x) := \lim_n f_n(x)$, $x \in (0,1)$. Provare che:
$f_n \in C^1\left((0,1)\right)$, f_n' converge uniformemente in $(0,1)$ $\Rightarrow$ $f \in C^1((0,1))$.

TEMA 2. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converga in $(-r,r)$. Sia, in $(-r,r)$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$. Provare che $f \in C^\infty((-r,r))$ e che f é analitica in $(-r,r)$.

TEMA 3. Enunciare e dimostrare le formule di Eulero.

TEMA 4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continua e $2\pi-$periodica. Siano $\hat{f}_n$ i suoi coefficenti di Fourier. Provare la diseguaglianza di Bessel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2 \ \leq\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

TEMA 5 . Provare che: $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow f(K)$ compatto.

ESERCIZIO 1 Trovare il raggio di convergenza delle serie di potenze in $\mathbf{R}$:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad\qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(n+1)x]^n}{n!}$$

e determinarne il comportamento sul bordo dei rispettivi intervalli di convergenza.

ESERCIZIO 2 Sia $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+\log(1+nx^2)}$, $x \in \mathbf{R}$. Determinare l'insieme su cui f_n converge e stabilire se su tale insieme la convergenza é anche uniforme.

ESERCIZIO 3 Calcolare, se esiste, $\int\limits_0^\pi \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n(n+1)} \right) dx.$

ESERCIZIO 4 Sia $\mathcal{A}$ matrice simmetrica $n \times n$. Sia

$$\lambda := \sup_{\|x\|=1} < \mathcal{A}x, x > = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{< \mathcal{A}x, x >}{\|x\|^2}$$

Provare che esiste x_0 di norma 1 tale che

$$< \mathcal{A}x_0, x_0 > \ \ \geq\ \ \frac{< \mathcal{A}(x_0 + th), x_0 + th >}{\|x_0 + th\|^2} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

Dedurre che $< \mathcal{A}x_0, h >= 0$ se $< h, x_0 >= 0$ e concludere che $\mathcal{A}x_0 = \lambda x_0$.