Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzione del tutorato numero 10 (5 Dicembre 2008)
Integrali dipendenti da parametro, massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $G(y,z)=\displaystyle\int_z^y \tan\left(t^2\right)dt$ e sia $\gamma(x)=(\cos x,\sin x)$: notiamo che $f(x)=$ $=G(\gamma(x))$, dunque $f'(x)=\langle\nabla G(\gamma(x)),\dot\gamma(x)\rangle$; inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $\nabla G(y,z)=\left(\tan\left(y^2\right)\right),-\left(\tan\left(z^2\right)\right)$ e quindi $f'(x)=\left\langle\left(\tan\left(\cos^2x\right),-\tan\left(\sin^2x\right)\right),(-\sin x,\cos x)\right\rangle=$ $=\left(-\sin x\tan\left(\cos^2x\right)-\cos x\tan\left(\sin^2x\right)\right)$.

2. Sia $G(y,z)=\displaystyle\int_{y^2}^{y^3}e^{-z^6t^2}dt$, e sia $\gamma(x)=(x,x)$: notiamo che $f(x)=G(\gamma(x))$, dunque $f'(x)=\langle\nabla G(\gamma(x)),\dot\gamma(x)\rangle=\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,x)+\dfrac{\partial G}{\partial z}(x,x)$; inoltre, $\dfrac{\partial}{\partial z}e^{-z^6t^2}=$ $=-6t^2z^5e^{-z^6t^2}$ esiste per ogni t fissato e, per $z\in[z_0-\delta,z_0+\delta]$, si ha $\left|\displaystyle\int_{y^2}^{y^3}-6t^2z^5e^{-z^6t^2}dt\right|\le 6(|z_0+\delta|)^5\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-(|z_0-\delta|)^6t^2}dt<+\infty$, dunque sono soddisfatte le ipotesi per portare la derivazione sotto il segno di integrale e perciò $\nabla G(y,z)=\left(3y^2e^{-z^6y^6}-2ye^{-z^6y^4},\displaystyle\int_{y^2}^{y^3}-6t^2z^5e^{-z^6t^2}dt\right)$ e quindi $f'(x)=$
$=3x^2e^{-x^{12}}-2xe^{-x^{10}}-6x^5\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}t^2e^{-x^5t^2}dt$.

3. $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt$: fissato t, la funzione $e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}$ è di classe C^1, e dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, è possibile derivare sotto segno di integrale, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\displaystyle\int_0^1-2t^2xe^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\displaystyle\int_0^1-2t^2ye^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt$, dunque $\nabla f=\left(-2x\displaystyle\int_0^1t^2e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt,\right.$ $\left.-2y\displaystyle\int_0^1t^2e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt\right)$; il gradiente si annulla solamente nel punto $(0,0)$, perché $\displaystyle\int_0^1t^2e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt$ è l'integrale di una funzione non negativa, continua e non identicamente nulla e quindi non è mai nullo; notiamo inoltre che $e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}\le1$ e dunque $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2}dt\le\int_0^1 1dt=1=f(0,0)$, quindi l'origine è un punto di massimo assoluto per la funzione, e dunque è anche di massimo locale.

4. $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(tx)dx.$

(a) Fissato x, la funzione $t \to e^{-x^2}\sin(tx)$ è continua; inoltre, $\left|e^{-x^2}\sin(tx)\right| \leq$ $\leq e^{-x^2}$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} < +\infty$, dunque c'è equidominatezza e quindi, per il teorema di continuità sotto integrale, si ha che $f \in C(\mathbb{R})$.

(b) $\dfrac{\partial}{\partial t}e^{-x^2}\sin(tx) = xe^{-x^2}\cos(tx)$ è una funzione continua in t; inoltre $\left|xe^{-x^2}\cos(tx)\right| \leq |x|e^{-x^2}$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|e^{-x^2} < +\infty$, dunque c'è equidominatezza e quindi, per il teorema di derivazione sotto integrale, si ha che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(c) Per quanto visto in precedenza, sono soddisfatte tutte le ipotesi necessarie per derivare sotto il segno di integrale, dunque $f'(t) =$ $= \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\cos(tx)dx$; integrando per parti, si ottiene

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\cos(tx)dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\cos(tx)\right]_0^{+\infty} -$$

$$- \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2}t\sin(tx)dx = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(tx)dx = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}f(t).$$

5. $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}dx.$

(a) Notiamo innanzi tutto che $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1 - e^{x(1-t)}}{x}dx$, dunque l'integranda non ha un asintoto nell'origine per nessun valore di t, in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{1 - e^{x(1-t)}}{x} = t - 1$, quindi la convergenza dell'integrale dipenderà solamente dal comportamento all'infinito dell'integranda: sicuramente per $t < 0$ la funzione non è definita perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}dx = -\infty$, se $t > 0$ l'integrale converge perchè ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$ e in $t = 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x}dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{dx}{x}$ e dunque diverge; quindi, l'insieme di definizione di f è $(0, +\infty)$.

(b) Innanzi tutto, f è continua perché se $t \in [\tau, +\infty)$, allora $|f(t)| \leq$ $\leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-x} - e^{-\tau x}}{x}\right| dx < +\infty$ e dunque c'è equidominatezza e si può applicare il teorema di continuità sotto integrale. Inoltre, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} = e^{-tx}$ e quindi per $t \in [\tau, +\infty)$ abbiamo che $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|e^{-\tau x}\right| dx < +\infty$, quindi la funzione è C^1 e

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}.$$

(c) $f(t) = \int_1^t f'(s)ds - f(1) = \int_1^t \frac{ds}{s} = \log t$, perché $f(1) =$
$= \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.

6. Innanzi tutto, notiamo che in tutti i casi la funzione f è continua e l'insieme A è compatto, dunque esisteranno sempre sia il massimo che il minimo.

(a) $f(x,y) = x - y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2\}$; usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: $\begin{cases} 1 = \lambda(2x) \\ -1 = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$; sommando le prime due equazioni, abbiamo che $2\lambda(x+y) = 0$, ma λ non può essere uguale a 0, altrimenti la prima equazione del sistema darebbe $1 = 0$, dunque deve essere $x = -y$: sostituendo questo all'interno della terza equazione, abbiamo che $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$, quindi i due possibili punti di massimo/minimo sono $(1,-1)$ e $(-1,1)$; poiché $f(1,-1) = 2$ e $f(-1,1) = -2$, possiamo concludere che $\max_{(x,y)\in A} f(x,y) = 2$ e $\min_{(x,y)\in A} f(x,y) = -2$. (Alternativamente, si poteva procedere notando che $A = \{(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), t \in [0, 2\pi)\}$ e studiare il massimo e il minimo della funzione $f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ per $t \in [0, 2\pi)$).

(b) $f(x,y) = \frac{1}{y - 3x + 3}$: questa volta, l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$ non coincide esattamente con l'insieme di livello di una funzione, ma presenta anche due punti di bordo che andranno studiati separatamente: per quanto riguarda invece i punti all'interno del vincolo, per i moltiplicatori di Lagrange si ha $\begin{cases} \frac{3}{(y-3x+3)^2} = -2\lambda x \\ -\frac{1}{(y-3x+3)^2} = \lambda \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$; posto $\mu = \lambda(y - 3x + 3)^2$, il sistema diventa $\begin{cases} 3 = -2\mu x \\ -1 = \mu \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$: sostituendo il valore di $\mu = -1$ nella prima equazione, troviamo $x = \frac{3}{2}$: i tre possibili punti di massimo/minimo sono dunque $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ e i due punti di bordo $(0,0)$ e $(2,4)$, ma essendo $f(0,0) = \frac{1}{3}$, $f(2,4) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = \frac{4}{3}$, concludiamo che $\max_{(x,y)\in A} f(x,y) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = \frac{4}{3}$ e $\min_{(x,y)\in A} = f(0,0) = \frac{1}{3}$. (Alternativamente, si poteva studiare il massimo e il minimo della funzione $f(x, x^2)$ per $x \in [0,2]$).

(c) $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$: stavolta, oltre al solito vincolo, l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq 9\}$ contiene anche punti interni, quindi bisognerà studiare anche gli eventuali massimi e minimi all'interno dell'insieme: $\nabla f = (3x^2 - 3, 2y)$ si annulla nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$, dove la funzione vale rispettivamente 2 e -2; cerchiamo ora altri eventuali punti

di massimo o minimo sul bordo di A risolvendo il sistema:
$\begin{cases} 3x^2-3=8\lambda x \\ 2y=2\lambda y \\ 4x^2+y^2-9=0 \end{cases}$; dalla seconda equazione si ricava che $y=0 \vee \lambda =$ $= 1$: se $y=0$, dall'equazione del vincolo otteniamo che $x=\dfrac{3}{2}$, e $f\left(\pm\dfrac{3}{2},0\right)=\pm\dfrac{9}{8}$; se invece $\lambda=1$ otteniamo $3x^2-3=8x$, cioè $x=3\vee$ $\vee x=-\dfrac{1}{3}$: per $x=3$ non ci sono punti sull'insieme A, mentre se $x=-\dfrac{1}{3}$ otteniamo $y=\pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ e $f\left(-\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}\right)=\dfrac{259}{27}$; riassumendo, $\max\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)=f\left(-\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{\sqrt{77}}{3}\right)=\dfrac{259}{27}$ e $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)=f(1,0)=-2$.

(d) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z=1\right\}$: notiamo innanzi tutto che la funzione è strettamente positiva all'interno di A ed è nulla sul bordo, dunque $\min\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z)=f(x,y,0)=f(x,0,z)=$ $=f(0,y,z)=0$; cerchiamo ora il massimo della funzione sul vincolo:
$\begin{cases} y^2z^3=\lambda \\ 2xyz^3=\lambda \\ 3xy^2z^2=\lambda \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$; eguagliando le prime due equazioni, e sapendo che $y\neq 0\neq z$, otteniamo che $y=2x$, facendo la stessa cosa con la prima e la terza invece abbiamo $z=3x$, e sostituendo nel vincolo troviamo $x=\dfrac{1}{6}$; dunque, il punto $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ deve essere necessariamente il punto di massimo della funzione sull'insieme A e dunque $\max\limits_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z)=f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{432}$.

7. I punti dell'ellissoide $2x^2-4x+y^2+z^2+1=0$ che distano meno dall'origine sono i punti della superficie di livello $2x^2-4x+y^2+z^2+1=0$ in cui la funzione distanza dall'origine $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ assume valore minimo, dunque l'esercizio consiste nella ricerca di punti di minimo vincolati; notiamo infine che una funzione f non negativa raggiunte il suo minimo valore in un punto se e solo se raggiunge il minimo anche la funzione $\sqrt{f}$, dunque per semplicità di calcolo studieremo il minimo della funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sull'insieme $2x^2-4x+y^2+z^2+1=0$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} 2x=\lambda(4x-4) \\ 2y=\lambda(2y) \\ 2z=\lambda(2z) \\ 2x^2-4x+y^2+z^2+1=0 \end{cases}$: dalla seconda e terza equazione si ricava che $\lambda=1$, oppure $y=0=z$; se $\lambda=1$, dalla prima equazione si ricaverebbe $x=2$, ma nell'ultima si avrebbe $y^2+z^2+1=0$, quindi deve essere necessariamente $y=0=z$, cioè nell'ultima equazione $2x^2-4x+1=$ $=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$; nel punto $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},0,0\right)$ la funzione $f(x,y,z)=x^2+$

$+y^2 + z^2$ vale $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, mentre in $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$ vale $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$; dunque, il punto di quell'ellissoide che dista meno dall'origine è $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$.