Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 5 (24 OTTOBRE 2008)
LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$; infatti, $\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right| =$
$= x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1$, perché, ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, si ha $\lim_{\rho\to(0,0)} \frac{\sin\left(\rho^2\right)}{\rho^2} = 1$.

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, perché $\left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$= \frac{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (d) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4} = 0$: $\left|\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}\right| \le \frac{1}{x^2+y^4} \le \frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{4}}$, perché $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$, e infine $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{4}} =$
$= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2-\frac{1}{4}} = 0$.

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + \left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2} = 1$:
$\left|\frac{x^2y + \left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2} - 1\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} + \cos\left(x^4+y^7\right) - 1\right| \le$
$\le \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + |\cos\left(x^4+y^7\right) - 1| \le \frac{\left(x^2+y^2\right)|y|}{x^2+y^2} + \left|\cos\left(x^4+y^7\right) - 1\right| =$
$= |y| + \left|\cos\left(x^4+y^7\right) - 1\right| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^2} = 0$; $\left|\frac{x^2y^3}{x^6+y^2}\right| = \frac{\left(x^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(y^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} \le$
$\le \frac{\left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^6+y^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} = \left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1} = \left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, quindi ci limiteremo a studiare la continuità

di f nell'origine: la funzione è continua anche in questo punto, perché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \dfrac{x^2\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)} =$
$= x^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, ma non lo è nell'origine perché, muovendosi lungo la parabola $x=y^2$ la funzione vale $f\left(y^2,y\right) = \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2} \overset{y\to 0}{\not\to} 0$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ non è continua nell'origine perché lungo la retta $y=x$ la funzione vale $f(x,x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2} \overset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}$.

(d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \dfrac{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} \leq$
$\leq \dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2} =$
$= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua $\Leftrightarrow \alpha > \dfrac{3}{2}$: se $\alpha \leq \dfrac{3}{2}$, lungo la curva $x=y^3$ la funzione vale $f(y^3,y) = \dfrac{|y|^{4\alpha}}{2y^6} = \dfrac{|y|^{4\alpha-6}}{2} \overset{y\to 0}{\not\to} 0$; se invece $\alpha > \dfrac{3}{2}$, $|f(x,y)-f(0,0)| = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} = \dfrac{\left(x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(y^6\right)^{\frac{\alpha}{6}}}{x^2+y^6} \leq$
$\leq \dfrac{\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(x^2+y^6\right)^{\frac{\alpha}{6}}}{x^2+y^6} = \left(x^2+y^6\right)^{\frac{2}{3}\alpha-1} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

4. Innanzi tutto, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt$ è definita solo per $x \geq 0$ perché altrimenti l'integranda conterrebbe la radice di una quantità negativa. Effettuando, come suggerito dal testo, un cambio di variabile all'interno dell'integrale, abbiamo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt \overset{(y=nt)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{\frac{y}{n}+x}}\frac{dy}{n} =$
$= \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y+nx}}dy$; a questo punto, integriamo per parti e troviamo $f_n(x) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y+nx}}dy = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left[\frac{\sin y}{\sqrt{y+nx}}\right]_0^{+\infty} + \right.$
$\left.\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy$. Se $x \neq 0$ la funzione

integranda converge uniformemente perché $\sup_{y\in(0,+\infty)}\left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq$
$\leq \sup_{y\in(0,+\infty)}\frac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ed è anche equidominata perché $\left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq$
$\leq \frac{y}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ sull'intervallo $(0,1)$ e $\left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$ in $[1,+\infty)$, e entrambe queste funzioni sono integrabili in senso improprio nei rispettivi intervalli; dunque si può passare al limite sotto integrale e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy = \int_0^{+\infty} 0dy = 0$; per $x=0$ invece si ha
$\lim_{n\to\infty}|f_n(0)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\left[\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\frac{3}{2}}}dy\right| \leq$
$\lim_{n\to\infty} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\int_0^1\frac{|\sin y|}{y^{\frac{3}{2}}}dy + \int_1^{+\infty}\frac{|\sin y|}{y^{\frac{3}{2}}}dy\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}} +\right.$
$\left.+\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}[2\sqrt{y}]_0^1 + \left[-\frac{2}{\sqrt{y}}\right]_1^{+\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, e dunque anche $f_n(0) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. La convergenza è uniforme perché, per quanto è stato visto in precedenza, $\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}dy\right| \leq$
$\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\sup_{x\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin y}{(y+nx)^{\frac{3}{2}}}\right|dy \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}} + \int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}\right) =$
$= \frac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

5. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,(2^n+3^n)}$: $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n(2^n+3^n)}\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n\left(\frac{2}{3}^n+1\right)n}}} = 3\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}^n+1\right)n}}} = 3$; per $x=3$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\,(2^n+3^n)}$ diverge per il confronto con la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ma in $x=-3$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{\sqrt{n}\,(2^n+3^n)}$ converge per il criterio di Leibniz.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$: applichiamo il criterio del rapporto: $r =$
   $= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 =$
   $= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$; per determinare il comportamento al bordo, ricordiamo la formula di Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$: dunque si

avrà che $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} \approx \dfrac{\sqrt{4\pi n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} 4^n} = \dfrac{2^{2n} n^{2n}}{\sqrt{\pi n} n^{2n} 4^n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$; dunque, per $x = \dfrac{1}{4}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$ diverge per il criterio del confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ mentre in $x = -\dfrac{1}{4}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$ converge per Leibniz.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - i^n)^n z^n$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 - i^n|^n}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |1 - i^n|} =$ $= \dfrac{1}{2}$; ai bordi dell'intervallo non c'è convergenza perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, se $|z| = \dfrac{1}{2}$, $|(1 - i^n)^n z^n| = 1$ se $n \equiv$ $\equiv 2 \mod 4$.