Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 8 (21 Novembre 2008)
Derivazione in più variabili

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile all'infuori dell'origine; nell'origine la funzione ammette derivate parziali entrambe identicamente nulle, perché $f(x,0)=0\ \forall x$ e $f(0,y)=0\ \forall y$, dunque $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$; inoltre, f è differenziabile (e quindi dotata di derivate direzionali) nell'origine in quanto $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$
$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2\sqrt{k^2}}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq$
$\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sqrt{h^4+k^2}}{\sqrt{h^4+k^2}\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0.$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ non è parzialmente derivabile (e dunque neanche differenziabile) nell'origine perché $f(x,0)=\frac{1}{x}$ e $f(0,y)=\frac{1}{y}$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}=+\infty$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=$
$=\lim_{k\to0}\frac{1}{k^2}=+\infty$; la funzione non ha neppure le derivate direzionali perché
$\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t(h+k)}{t^3(h^2+k^2)}=\lim_{t\to0^+}\frac{h+k}{t^2(h^2+k^2)}=$
$=\begin{cases}+\infty & \text{se } h+k>0\\ -\infty & \text{se } h+k<0\\ 0 & \text{se } h+k=0\end{cases}.$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log\left(1+x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine: infatti $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\log\left(1+h^2\right)}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+h^2\right)-h^2}{h^3}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2h}{1+h^2}-2h}{3h^2}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{-2h^3}{(3h^2)(1+h^2)}=\lim_{h\to0}\frac{-2h}{3\,(1+h^2)}=0$; analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=$

$= \lim_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{\frac{\log(1+k^2)}{k^2}-1}{k} = 0$; la funzione è inoltre differenziabile (e quindi ha derivate direzionali) nell'origine perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\frac{\log(1+h^2+k^2)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \dfrac{\frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2}-1}{\rho} = 0$.

(d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z^2}{x^2+y^4+z^6} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è identicamente nulla sugli assi cartesiani, quindi possiede tutte le derivate parziali (nulle) nell'origine; inoltre, è differenziabile (e quindi derivabile in ogni direzione) in quanto $\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left| \dfrac{hk^2j^2}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \right| =$
$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left| \dfrac{\sqrt{h^2}\sqrt{k^4}\sqrt{j^2}|j|}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \right| \leq$
$\leq \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \left| \dfrac{\sqrt{h^2+k^4+j^6}\sqrt{h^2+k^4+j^6}\sqrt{h^2+k^2+j^2}|j|}{(h^2+k^4+j^6)\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \right| =$
$= \lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} |j| = 0$.

(e) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ è chiaramente differenziabile fuori dagli assi cartesiani; sugli assi cartesiani, l'unico punto in cui esistono entrambe le derivate parziali è l'origine: infatti, $f(x,0)=0=f(y,0)$ e quindi le derivate parziali sono entrambe nulle; nei punti del tipo $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$ invece, esiste solo $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, anch'essa nulla, poiché $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) =$
$= \lim_{k\to 0} \dfrac{f(x_0+k,0)-f(x_0,0)}{k} = 0$, mentre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) =$
$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{|x_0h|}}{h}$ non esiste; per simmetria, nei punti $(0,y_0)$ esiste (nulla) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ma non $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; anche le derivate direzionali esistono solamente nell'origine perché $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{t^2xy}}{t} = \sqrt{|xy|}$ ma se $x_0\neq 0$, $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(x_0+th,tk)-f(x_0,0)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{|(x_0+th)tk|}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{\dfrac{|(x_0+th)k|}{t}} = +\infty$ e per simmetria nei punti del tipo $(0,y_0)$ si ha $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(th,y_0+tk)-f(0,y_0)}{t} =$
$= \sqrt{\dfrac{|h(y_0+tk)|}{t}} = +\infty$; nell'origine, tuttavia, la funzione non è differenziabile perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se $h=k$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ è chiaramente differenziabile al di fuori dell'asse y; l'unico punto di quest'asse in cui la funzione ammette derivate parziali è l'origine; infatti, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) =$

$= \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0, y_0 + k) - f(0, y_0)}{k} = 0 \ \forall y_0$ ma $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) =$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} y_0^2 \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$, che esiste (e vale 0), $\Leftrightarrow y_0 = 0$;
inoltre, la funzione è differenziabile nell'origine, perché
$\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \left| \dfrac{hk^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \dfrac{|h|(h^2 + k^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$
$= \lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} |h|\sqrt{h^2 + k^2} = 0$; infine, negli altri punti f ammette derivate direzionali solamente in direzione dell'asse y: infatti, se $y_0 \neq 0$ si ha
$\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(th, y_0 + tk) - f(0, y_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{th(y_0 + tk)^2 \sin\left(\frac{1}{th}\right)}{t} =$
$= \lim\limits_{t \to 0^+} h(y_0 + k)^2 \sin\left(\dfrac{1}{th}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ \nexists & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.

2. (a) $f(x, y) = \dfrac{xy^4}{x^6 + y^2}$ può essere estesa ad una funzione continua anche nell'origine con $f(0, 0) = 0$, perché $|f(x, y)| \leq \dfrac{|x|y^2\left(x^6 + y^2\right)}{x^6 + y^2} =$
$= |x|y^2 \overset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$; la funzione ammette inoltre derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$, mentre negli altri punti si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^4\left(x^6 + y^2\right) - 6x^6y^4}{\left(x^6 + y^2\right)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$
$= \dfrac{4xy^3\left(x^6 + y^2\right) - 2xy^5}{\left(x^6 + y^2\right)^2}$, e sono entrambe continue nell'origine perché
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq \left|\dfrac{y^4\left(x^6 + y^2\right)}{\left(x^6 + y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{6x^6y^4}{\left(x^6 + y^2\right)^2}\right| \leq \left|\dfrac{y^2\left(x^6 + y^2\right)^2}{\left(x^6 + y^2\right)^2}\right| +$
$+ \dfrac{6x^6\left(x^6 + y^2\right)^2}{\left(x^6 + y^2\right)^2} = y^2 + 6x^6 \overset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$ e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq$
$\left|\dfrac{4xy^3\left(x^6 + y^2\right)}{\left(x^6 + y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{2xy^5}{\left(x^6 + y^2\right)^2}\right| \leq \dfrac{4|xy|\left(x^6 + y^2\right)\left(x^6 + y^2\right)}{\left(x^6 + y^2\right)^2} +$
$+ \dfrac{2|xy|\left(x^6 + y^2\right)^2}{\left(x^6 + y^2\right)^2} = 6|xy| \overset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$; quindi, la funzione può essere prolungata ad una funzione di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

(b) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^2}$ può essere anch'essa estesa ad una funzione continua nell'origine con $f(0, 0) = 0$, in quanto $|f(x, y)| \leq \dfrac{x^2\left(x^4 + y^2\right)}{x^4 + y^2} =$
$= x^2 \overset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$; inoltre, essendo nulla lungo gli assi cartesiani, f possiede anche derivate parziali nell'origine; tuttavia, solamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ è continua nell'origine, infatti $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{2xy^2\left(x^4 + y^2\right) - 4x^5y^2}{\left(x^4 + y^2\right)^2}\right| \leq$
$\leq \dfrac{2|x|y^2\left(x^4 + y^2\right)}{\left(x^4 + y^2\right)^2} + \dfrac{4|x|^5y^2}{\left(x^4 + y^2\right)^2} \leq \dfrac{2|x|\left(x^4 + y^2\right)\left(x^4 + y^2\right)}{\left(x^4 + y^2\right)^2} +$

$$+\frac{4|x|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}=6|x|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0,\text{ ma }\frac{\partial f}{\partial y}=$$

$$=\frac{2x^2y\left(x^4+y^2\right)-2x^2y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$ e quest'ultima quantità non è continua perché, calcolata lungo la curva $y=x^2$, vale $\dfrac{4x^8-2x^8}{4x^8}=\dfrac{1}{2}$.

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{(x^6+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è anch'essa nulla sugli assi cartesiani e quindi le derivate parziali nell'origine esistono e sono nulle, $\forall\alpha>0$; la funzione è anche differenziabile (e ha derivate direzionali) per $\alpha<\dfrac{2}{3}$: infatti, se $\alpha\geq\dfrac{2}{3}$ il limite $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}$ calcolato sulla curva $k=h^3$, vale $\dfrac{|h|^{4-6\alpha}}{2^\alpha\sqrt{1+h^4}}$, che non tende a 0, mentre se $\alpha<\dfrac{2}{3}$ allora
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|h|\left(h^6\right)^{\frac{1}{6}}\left(k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}\leq$$
$$\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{h^2+k^2}\left(h^6+k^2\right)^{\frac{1}{6}}\left(h^6+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^6+k^2\right)^\alpha\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(h^2+k^6\right)^{\frac{2}{3}-\alpha}=0;$$
infine, la funzione ammette derivate direzionali nell'origine anche per $\alpha\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$, perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3h^2k}{t\left(t^6h^6+t^2k^2\right)^\alpha}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{2-2\alpha}h^2k}{\left(t^4h^6+k^2\right)^\alpha}$ esiste finito solamente per $\alpha\leq1$.

4. (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ è chiaramente continua, è dotata di tutte le derivate direzionali in quanto $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t}=$ $=\sqrt{h^2+k^2}$, ma non ha derivate parziali perché $f(x,0)=|x|$ e $f(0,y)=|y|$ non sono funzioni derivabili.

   (b) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ è chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=$ $\displaystyle=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t}=\lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\frac{hk}{t}}=+\infty$.

   (c) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ è chiaramente continua nell'origine, ma non ammette derivate parziali perché $f(x,0)=x^{\frac{2}{3}}$ e $f(0,y)=y^{\frac{2}{3}}$ non sono funzioni derivabili in 0, e non possiede derivate direzionali in alcuna direzione perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t}=$ $\displaystyle=\lim_{t\to0^+}\sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}}=+\infty$.

   (d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ non è continua nell'origine perché

$f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^6+x^4} = \dfrac{1}{x^2+1} \overset{x\to 0}{\to} 1$; l'esistenza di derivate parziali e direzionali di questa funzione è stata già discussa nel terzo esercizio, con $\alpha = 1$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine, con derivate parziali entrambe nulle, perché è nulla lungo gli assi cartesiani; non è continua perché $f(x,x) = \dfrac{1}{2} \overset{x\to 0}{\not\to} 0$ e non ha le derivate direzionali in quanto $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2hk}{t^3\,(h^2+k^2)} = = \lim_{t\to 0^+} \frac{hk}{t\,(h^2+k^2)} = +\infty$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A \\ 1 & \text{se } (x,y) \in A \end{cases}$, ove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2, x \neq 0\}$ non è continua, perché non lo è lungo la parabola A, non ha le derivate parziali perché lungo gli assi vale rispettivamente $|x|$ e $|y|$, ma ha tutte le derivate direzionali perché $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} = \sqrt{h^2+k^2}$, dato che per t opportunamente piccolo la funzione lungo qualsiasi retta coincide con $\sqrt{x^2+y^2}$.