Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Tutorato numero 1 (26 Settembre 2008)
Successioni di funzioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = e^{-nx}$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2 x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (g) $f_n(x) = \arctan\left(n^2 - x\right)$

   (h) $f_n(x) = \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2}dt$

   (i) $f_n(x) = \sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}$

2. Sia $f_n(x) = \frac{\arctan \frac{x}{n}}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$,stabilire se $f_n(x)$ e $f_n'(x)$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.
   Ripetere l'esercizio per $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

3. Calcolare:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n \sin x \cos x}{n+x} dx$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} dx$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+x} dx$ *(Suggerimento: integrare per parti)*

4. Sia f_n una successione di funzioni di classe C^1 tali che $f_n(0)$ è limitata. Provare che se f_n' ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$, allora f_n ha anch'essa una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$.