Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Tutorato numero 4 (17 Ottobre 2008)
Funzioni analitiche, variabili complesse, serie di Fourier

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\log(-4)$

   (b) $\log\left(1+\sqrt{3}i\right)$

   (c) $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\pi i)^n}{n!}\right)$

   (d) $\sqrt[3]{1+i}$

   (e) $(3i)^{\sqrt{2}}$

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1-i}{1+i}}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze complesse e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos n + i\sin n)z^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 (2i)^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{n!}z^n$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\cosh(in)z^n$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty}(\arctan n)^n z^n$

3. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di Fourier:

   (a) $f(x)=\sin x\cos x$ (b) $f(x)=x^2$ (c) $f(x)=e^x$

   Dedurre dal punto b che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4. Utilizzando la somma della serie geometrica e le Formule di Eulero, provare che $\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos(nx)=\frac{1-r\cos x}{r^2-2r\cos x+1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} r^n\sin(nx)=\frac{r\sin x}{r^2-2r\cos x+1}$ $\forall r\in(0,1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. Siano f e g due funzioni analitiche sull'intervallo (a,b). Provare che se $f(x)g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$, allora o $f(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ oppure $g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. Mostrare, con un controesempio, che ciò può non essere vero se f e g sono solamente di classe C^∞.