

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 6 (31 OTTOBRE 2008)

LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3)}{x^2 + y^4}$$

$$(c) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{(x^4 + y^2 + z^4) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|xy|)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2} dt}{y-x} & \text{se } x \neq y \\ e^{-xy} & \text{se } x = y \end{cases}$$

$$(c) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y z^3}{x^6 + y^2 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ la continuità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(7x^8 + 2y^4)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$(a) f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$$

$$(b) f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$$

$$(c) f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x^n + n^n}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\log n}$$

6. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = i$