

# AM3 tutorato 1

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito  
 Tutori: G. Mancini, E. Padulano  
 Tutorato 1 del 25 Febbraio 2009

**Esercizio 1** Calcolare i seguenti integrali:

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cos x \, dx$
2.  $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$
3.  $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2(x^2+3)} \, dx$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2} \, dx$

**Esercizio 2** Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

- (a)  $|\sin x| \leq |x|$
- (b)  $|1 - \cos x| \leq \frac{1}{2}x^2$
- (c)  $|e^x - 1| \leq 3|x| \, \forall x \text{ t.c. } |x| \leq 1$
- (d)  $|\log(1+x)| \leq 2|x| \text{ se } |x| < \frac{1}{2}$
- (e)  $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

**Esercizio 3** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |y| \leq 1 - |x|, -1 \leq x \leq 1\}$ ;
- (b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 4y^2 \leq 4, x^2 - 2y^2 \leq 1\}$ ;
- (c)  $C = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\}$ ;
- (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |y| \leq \frac{2|x|}{(x^4+1)}\}$ ;

**Esercizio 4** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ ;
- (b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 + y\}$ ;
- (c)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ ;
- (d)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq z^2(1-z)^2\}$ ;

**Esercizio 5** Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato dimostrare che la funzione  $x \mapsto \|x\|$  è continua su  $E$ .

**Esercizio 6** Sia  $E = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$  lo spazio vettoriale delle successioni reali;

- (a) Mostrare che  $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$  è una norma su  $E$ .
- (b) Provare che  $\forall c > 0$  l'insieme  $E_c = \{x \in E ; \|x\|_1 \leq c\}$  è un sottoinsieme chiuso di  $E$ .
- (c) Dimostrare che la mappa  $\Phi : E_1 \rightarrow E_1$  definita da  $\Phi(x)(n) = \frac{x(n)^2}{n+2}$  è una contrazione in  $E_1$ .

**Esercizio 7** Calcolare (senza fare troppi conti)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \arctan x}{(1 + \cos^2 x) \cosh x} \log(1 + |x|) dx$