

AM3 tutorato 3

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 3 del 11 Marzo 2009

Esercizio 1 Per ognuna delle seguenti funzioni stabilire se in un intorno del punto indicato è possibile scrivere l'insieme di livello $\{F = 0\}$ come grafico di una funzione $y = g(x)$. Fornire inoltre una stima dell'intorno di definizione della funzione g e determinarne lo sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine.

(a) $F(x, y) = 2 - e^{2y} - \cos x$ in $(0, 0)$

(b) $F(x_1, x_2, y) = y^2 + e^{x_1 x_2} - 2$ in $(0, 0, 1)$

(c) $F(x_1, x_2, y) = 1 - \log(e + x_2) + \sin(2x_1 x_2 y) + x_1^2 - y^2$ in $(1, 0, -1)$

(d) $F(x, y) = \log x + \cos(xy)$ in $(1, \frac{\pi}{2})$

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y_1, y_2) = (\arctan x - e^{-y_1} \sin y_2, e^{x-y_1} - \sin x y_2 - \cosh y_1)$$

(a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(0) \rightarrow B_\rho(0, 0)$ di classe C^1 tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 \forall x \in B_r(0)$.

(b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .

(c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g .

Esercizio 3 Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (x^3 + x \log(1 + y) + 2 \cos(x + \frac{\pi}{2}), \arctan y - e^{x^2} \cos x)$$

(a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(0, -1) \rightarrow B_\rho(0, 0)$ di classe C^1 tale che $F(g(u, v)) = (u, v) \forall (u, v) \in B_r(0, -1)$.

(b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .

(c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g .

Esercizio 4 Provare che la mappa $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ definita da

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{f(t)}{1+t^2}\right) dt$$

è una contrazione in $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

Esercizio 5 Studiare la convergenza in l_p delle seguenti successioni:

(a) $x_n(k) = \frac{\pi + \sin(\frac{3}{nk})}{k}$

(b) $x_n(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2k^2 + 1)^i}$