Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 soluzioni tutorato 6

A.A 2008-2009
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G.Mancini, E. Padulano
Tutorato 6 dell' 8 Aprile 2009

Esercizio 1 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1,\ x > 0\};$

Per prima cosa notiamo che $f(n,1) = \frac{n}{1+n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi siccome f è sempre positiva su A si ha che $\inf_A f = 0$. Non si tratta di un minimo perchè non ci sono punti di A in cui f vale 0. Cerchiamo ora $\sup\limits_A f$. L'estremo superiore di f su A o è raggiunto in un punto di A oppure si ottiene lungo una opportuna successione $(x_n, y_n) \in A$ tale che $\|(x_n, y_n)\| \longrightarrow \infty$.

Notiamo però che $|f(x,y)| = \dfrac{|x|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi necessariamente $\sup\limits_A f$ è raggiunto in un punto di A (ed è quindi un massimo). Cerchiamo dunque i punti critici di f in A.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Le due derivate parziali di f non si annullano mai in A quindi non ci sono punti critici interni ad A.

Cerchiamo i possibili punti di massimo di f sul bordo di A. $\partial A = \{xy = 1,\ x > 0\} = \{g = 0\}$ dove $g(x,y) = xy - 1$. I possibili punti di massimo di f sul bordo di A sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \lambda y \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$$

Siccome $x \neq 0$ allora dalla seconda equazione ricaviamo che $\lambda = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$. Sostituendo nella prima equazione ricaviamo che $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow x^2 = 3y^2$

$\Longrightarrow x = \sqrt{3}\, y$. Sostituendo nell'ultima equazione si ottiene che $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ e $x = \sqrt[4]{3}$.

L'unica soluzione del sistema è il punto $\left(\sqrt[4]{3}\,,\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

$f\left(\sqrt[4]{3}\,,\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}$ quindi $\sup\limits_A f = \dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}$ ed è un massimo perchè è assunto nel punto $\left(\sqrt[4]{3}\,,\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Esercizio 2 $f(x,y,z) = y - x^2 + \dfrac{2}{3}\cos^3 z \qquad B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = \sin^2 z,\ 0 \leq z < \dfrac{2}{3}\pi\right\};$

Notiamo che f è una funzione continua definita su $\overline{B}$ e quindi in particolare f è limitata in B. $\inf\limits_B f$ e $\sup\limits_B f$ o sono raggiunti in un punto di B oppure si ottengono lungo opportune successioni in B che si avvicinano al "bordo" di B (cioè alla circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del piano $z = \frac{2}{3}\pi$). Cerchiamo per prima cosa i punti critici di f su B. Questi punti sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ -2\cos^2 z \sin z = -2\lambda \sin z \cos z \\ x^2 + y^2 = \sin^2 z \end{cases} \quad \text{che soddisfano la condizione } 0 \le z < \tfrac{2}{3}\pi.$$

-Se $\sin z = 0$ allora $z = 0$ e quindi dall' ultima equazione $x = y = 0$. Tuttavia $(0,0,0)$ non è soluzione perchè non soddisfa la seconda equazione.

-Se $\cos z = 0$ allora $z = \frac{\pi}{2}$ e quindi il sistema diventa $\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$. Se $x \neq 0$ allora $\lambda = -1$ e quindi dalla seconda equazione ricaviamo che $y = -\frac{1}{2}$ e $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

-Se $\sin z, \cos z \neq 0$ allora il sistema diventa $\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ \cos z = \lambda \\ x^2 + y^2 = \sin^2 z \end{cases}$.

Se $x = 0$ allora $y^2 = \sin^2 z$ cioè $y = \sin z$ o $y = -\sin z$. Se $y = \sin z$ allora la seconda equazione ci dice che $1 = 2\cos z \sin z = \sin 2z \Longrightarrow z = \frac{\pi}{4}$ e $y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se invece $y = -\sin z$ allora si ha che $1 = -\sin 2z$ e quindi $z = \frac{3}{4}\pi$; questo ultimo caso non ci interessa perchè $\frac{3}{4}\pi > \frac{2}{3}\pi$.
Se $x \neq 0$ allora si ha che $\lambda = -1 \Longrightarrow \cos z = -1 \Longrightarrow z = \pi$ pertanto anche questo caso non ci interessa.
Le soluzioni del sistema in B sono dunque $(0, \pm 1, \frac{\pi}{2})$, $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$.
Studiamo ora il comportamento della funzione f nei punti della circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del piano $z = \frac{2}{3}\pi$.
$f(x, y, \frac{2}{3}\pi) = y - x^2 - \frac{1}{12}$ quindi i possibili punti di massimo/minimo di f sulla circonferenza sono soluzioni del sistema

$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$. Se $x = 0$ allora $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se $x \neq 0$ allora $y = -\frac{1}{2}$ e quindi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Quindi dobbiamo considerare anche i punti $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{3}\pi)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi)$.
Anche il punto $(0,0,0)$ va tenuto in considerazione perchè è un punto in cui il vincolo non è regolare.
$f(0, \pm 1, \frac{\pi}{2}) = \pm 1$, $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) = -\frac{5}{4}$, $f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $f(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{12} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi) = -\frac{13}{12}$.
Quindi $\inf\limits_{B} f = -\dfrac{5}{4}$ e $\sup\limits_{B} f = 1$ e sono rispettivamente il minimo e il massimo di f in B perchè sono assunti in punti di B.

Esercizio 3 .
$F(x, y) = \left(e^{\sin y} - \log(1 + x) + x\sqrt{1 + y^2},\ 2\sin x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} y\right)\right)$

(a) $F(0,0) = (1,0)$.
$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+x} + \sqrt{1 + y^2} & e^{\sin y}\cos y + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} \\ 2\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) & -\pi \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) \end{pmatrix}$$
$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Siccome $J_F(0,0)$ è una matrice invertibile allora per il teorema della funzione inversa F è invertibile in un intorno del punto $(0,0)$ cioè $\exists\ r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(1,0) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1 tale che $F(g_1(u, v), g_2(u, v)) = (u, v)\ \forall\ (u, v) \in B_r(1,0)$.

(b) Sia $T = J_F(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per stimare i raggi r e ρ dobbiamo imporre che $\sup_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_F(x,y)\| \le \frac{1}{2}$ e che $r \le \frac{\rho}{2\|T\|}$. Per far questo è sufficiente imporre che $\sup_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_F(x,y)\|_\infty \le \frac{1}{4}$ e che $r \le \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \frac{\rho}{4}$

$$Id - TJ_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+x} + \sqrt{1+y^2} & e^{\sin y}\cos y + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} \\ 2\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) & -\pi \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) & \frac{\pi}{2}\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \\ \frac{1}{1+x} - \sqrt{1+y^2} & 1 - e^{\sin y}\cos y - \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} \end{pmatrix}$$

$$|1 - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)| \le |1 - \cos x| + |\cos x||1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)| \le \frac{1}{2}x^2 + |1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)|$$
$$\le \frac{\rho^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}x^2 \le \frac{\rho^2}{2} + 2\rho^2 = \frac{5}{2}\rho^2 \le \frac{5}{2}\rho$$
$$\left|\frac{\pi}{2}\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right| \le \frac{\pi}{2}|\sin x| \le 2|x| \le 2\rho$$
$$\left|\frac{1}{1+x} - \sqrt{1+y^2}\right| \le \left|\frac{1}{x+1} - 1\right| + \left|1 - \sqrt{1+y^2}\right| = \frac{|x|}{|x+1|} + \left|1 - \sqrt{1+y^2}\right| \frac{\left|1+\sqrt{1+y^2}\right|}{\left|1+\sqrt{1+y^2}\right|}$$
$$\le 2|x| + \frac{y^2}{1+\sqrt{1+y^2}} \le 2\rho + y^2 \le 2\rho + \rho^2 \le 2\rho + \rho = 3\rho$$
$$|1 - e^{\sin y}\cos y - \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}| \le |1 - \cos y| + |\cos y||1 - e^{\sin y}| + \frac{|xy|}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{2}y^2 +$$
$$+3|\sin y| + |xy| \le \frac{1}{2}\rho^2 + 3|y| + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \le \frac{\rho^2}{2} + 3\rho + \frac{\rho^2}{2} = \rho^2 + 3\rho \le 4\rho$$

Quindi $\sup_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_F(x,y)\|_\infty \le 4\rho \le \frac{1}{4}$ se $\rho \le \frac{1}{16}$. Possiamo dunque prendere $\rho = \frac{1}{16}$ e $r \le \frac{\rho}{4} = \frac{1}{64}$

(c) Per determinare gli sviluppi di Taylor delle componenti di g sfruttiamo il fatto che $F(g(u,v)) = (u,v)$ cioè $\left(e^{\sin g_2} - \log(1+g_1) + g_1\sqrt{1+g_2^2},\ 2\sin g_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}g_2\right)\right) = (u,v)$. Derivando le due componenti in u e v otteniamo che

$$e^{\sin g_2}\cos g_2 \frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{1}{1+g_1}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial u}\sqrt{1+g_2^2} + \frac{g_1 g_2}{\sqrt{1+g_2^2}}\frac{\partial g_2}{\partial u} = 1$$
$$e^{\sin g_2}\cos g_2 \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{1}{1+g_1}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\sqrt{1+g_2^2} + \frac{g_1 g_2}{\sqrt{1+g_2^2}}\frac{\partial g_2}{\partial v} = 0$$
$$2\cos g_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}g_2\right)\frac{\partial g_1}{\partial u} - \pi \sin g_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}g_2\right)\frac{\partial g_2}{\partial u} = 0$$
$$2\cos g_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}g_2\right)\frac{\partial g_1}{\partial v} - \pi \sin g_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}g_2\right)\frac{\partial g_2}{\partial v} = 1$$

Calcolando in $(1,0)$ tenendo conto del fatto che $g_1(1,0) = g_2(1,0) = 0$ otteniamo che $\frac{\partial g_1}{\partial u}(1,0) = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial v}(1,0) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial g_2}{\partial u}(1,0) = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial v}(1,0) = 0$. Derivando nuovamente le derivate della seconda componente otteniamo che

$$-2\sin g_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\left(\tfrac{\partial g_1}{\partial u}\right)^2 - \pi\cos g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial u}\tfrac{\partial g_2}{\partial u} + 2\cos g_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial u^2} +$$
$$-\pi\cos g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_1\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial u}\tfrac{\partial g_2}{\partial u} - \tfrac{\pi^2}{2}\sin g_1 \cos(\tfrac{\pi}{2}g_2)\left(\tfrac{\partial g_2}{\partial u}\right)^2 - \pi\sin g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial u^2} = 0$$

$$-2\sin g_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial u}\tfrac{\partial g_1}{\partial v} - \pi\cos g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial u}\tfrac{\partial g_2}{\partial v} + 2\cos g_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v} +$$
$$-\pi\cos g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_1\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial v}\tfrac{\partial g_2}{\partial u} - \tfrac{\pi^2}{2}\sin g_1 \cos(\tfrac{\pi}{2}g_2)\tfrac{\partial g_2}{\partial u}\tfrac{\partial g_2}{\partial v} - \pi\sin g_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial u^2} = 0$$

$$-2\sin g_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\left(\tfrac{\partial g_1}{\partial v}\right)^2-\pi\cos g_1\sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial v}\tfrac{\partial g_2}{\partial v}+2\cos g_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}+$$
$$-\pi\cos g_1\sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_1\right)\tfrac{\partial g_1}{\partial v}\tfrac{\partial g_2}{\partial v}-\tfrac{\pi^2}{2}\sin g_1\cos(\tfrac{\pi}{2}g_2)\left(\tfrac{\partial g_2}{\partial v}\right)^2-\pi\sin g_1\sin\left(\tfrac{\pi}{2}g_2\right)\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial v^2}=0$$

da cui $\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(1,0)=\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}(1,0)=\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}(1,0)=0.$

Quindi $g_1(u,v)=\frac{1}{2}v+o(u^2+v^2)\qquad g_2(u,v)=(u-1)+o(\sqrt{x^2+y^2})$

Esercizio 4 Sia $F:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=\left(\frac{1}{3}x_1^4+y_1\arctan y_2-\frac{1}{3}e^{y_1},\ x_1x_2+\tan y_1+y_2\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\right)$$

(a) F è una funzione di classe C^1 intorno al punto $(1,0,0,0)$ tale che $F(1,0,0,0)=(0,0)$.

Inoltre $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0,0,0)=\begin{pmatrix}\arctan y_2-\frac{1}{3}e^{y_1} & \frac{y_1}{1+y_2^2}\\ \frac{1}{\cos^2 y_1} & \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\end{pmatrix}_{(1,0,0,0)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

è una matrice invertibile (e $T=\frac{\partial F}{\partial y}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$) quindi per il teorema della funzione implicita in un intorno del punto $(1,0,0,0)$ l'insieme $\{F=0\}$ è il grafico di una funzione $g:B_r(1,0)\longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1.

(b) Per stimare r e ρ dobbiamo imporre che $\sup_{B_r(1,0)}|F(x_1,x_1,0,0)|\le\dfrac{\rho}{2\|T\|}$ e che $\sup_{B_\rho(0,0)}\left\|Id-T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right\|\le\dfrac{1}{2}$. Per far questo è sufficiente prendere r e ρ in modo tale che $\sup_{B_r(1,0)}|F(x_1,x_1,0,0)|\le\dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty}=\dfrac{\rho}{12}$ e $\sup_{B_\rho(0,0)}\left\|Id-T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right\|_\infty\le\dfrac{1}{4}$.

$F(x_1,x_2,0,0)=(\frac{1}{3}x_1^4-\frac{1}{3},x_1,x_2)$. Supponendo che $r\le 1$ abbiamo che

$$|\frac{1}{3}x_1^4-\frac{1}{3}|=\frac{1}{3}|x_1^4-1|=\frac{1}{3}|x_1^2-1||x_1^2+1|\le\frac{1}{3}|x_1-1||x_1+1||x_1^2+1|\le$$
$$\le\frac{15}{3}|x_1-1|\le 5r$$
$$|x_1x_2|\le 2|x_2|\le 2r$$

Quindi $\sup_{B_r(1,0)}|F(x_1,x_1,0,0)|\le\sqrt{25r^2+4r^2}\le 6r\le\dfrac{\rho}{12}$ se prendiamo $r\le\dfrac{\rho}{72}$

$$Id-T\frac{\partial F}{\partial y}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\arctan y_2-\frac{1}{3}e^{y_1} & \frac{y_1}{1+y_2^2}\\ \frac{1}{\cos^2 y_1} & \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1+3\arctan y_2-e^{y_1} & \frac{3y_1}{1+y_2^2}\\ -3\arctan y_2+e^{y_1}-\frac{1}{\cos^2 y_1} & 1-\frac{3y_1}{1+y_2^2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\end{pmatrix}$$

$$|1+3\arctan y_2-e^{y_1}|\le|3\arctan y_2|+|1-e^{y_1}|\le 3|y_2|+3|y_1|\le 6\rho$$
$$\left|\frac{3y_1}{1+y_2^2}\right|\le 3|y_1|\le 3\rho$$
$$\left|-3\arctan y_2+e^{y_1}-\frac{1}{\cos^2 y_1}\right|\le|3\arctan y_2|+|e^{y_1}-1|+\left|1-\frac{1}{\cos^2 y_1}\right|\le$$
$$\le 3|y_2|+3|y_1|+\frac{\sin^2 y_1}{\cos^2 y_1}\le 3\rho+3\rho+2\sin^2 y_1\le 6\rho+2\rho^2\le 8\rho$$
$$\left|1-\frac{3y_1}{1+y_2^2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\right|\le\left|\frac{3y_1}{1+y_2^2}\right|+\left|1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\right|\le 3\rho+\left|1-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x_1-1)+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$
$$=3\rho+\left|1-\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1-1)\right)\right|\le 3\rho+\frac{\pi^2}{8}|x_1-1|^2\le 3\rho+2r\le 3\rho+\frac{\rho}{36}$$

Pertanto $\sup_{B_\rho(0,0)} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right\|_\infty \le 8\rho \le \frac{1}{4}$ se $\rho \le \frac{1}{32}$

Possiamo quindi prendere $\rho = \frac{1}{32}$ e $r \le \frac{\rho}{72}$

(c) Per determinare lo sviluppo di Taylor della funzione g sfruttiamo il fatto che $F(x_1, x_2, g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)) = 0$ cioè

$$\frac{1}{3}x_1^4 + g_1 \arctan g_2 - \frac{1}{3}e^{g_1} = 0 \qquad x_1x_2 + \tan g_1 + g_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) = 0.$$

Derivando le due relazioni in x_1 e x_2 otteniamo che

$$\frac{4}{3}x_1^3 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\arctan g_2 + g_1\frac{1}{1+g_2^2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{1}{3}e^{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\arctan g_2 + g_1\frac{1}{1+g_2^2}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{1}{3}e^{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0$$

$$x_2 + (1+\tan^2 g_1)\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) + \frac{\pi}{2}g_2\cos\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) = 0$$

$$x_1 + (1+\tan^2 g_1)\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) = 0$$

Calcolando in $(1,0)$ otteniamo che $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(1,0) = 4$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(1,0) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(1,0) = -4$, $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(1,0) = -1$.

Deriviamo di nuovo le derivate della prima componente:

$$4x_1^2 + \tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}\arctan g_2 + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\tfrac{1}{1+g_2^2} + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\tfrac{1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + g_1\left(\tfrac{d}{dx_1}\tfrac{1}{1+g_2^2}\right)\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \tfrac{g_1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} +$$
$$-\tfrac{1}{3}e^{g_1}\left(\tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^2 - \tfrac{1}{3}e^{g_1}\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}\arctan g_2 + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\tfrac{1}{1+g_2^2} + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\tfrac{1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + g_1\left(\tfrac{d}{dx_2}\tfrac{1}{1+g_2^2}\right)\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \tfrac{g_1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$-\tfrac{1}{3}e^{g_1}\tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \tfrac{1}{3}e^{g_1}\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2}\arctan g_2 + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\tfrac{1}{1+g_2^2} + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\tfrac{1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial g_2}{\partial x_2} + g_1\left(\tfrac{d}{dx_2}\tfrac{1}{1+g_2^2}\right)\tfrac{\partial g_2}{\partial x_2} + \tfrac{g_1}{1+g_2^2}\tfrac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} +$$
$$-\tfrac{1}{3}e^{g_1}\left(\tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)^2 - \tfrac{1}{3}e^{g_1}\tfrac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} = 0$$

Da cui $\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}(1,0) = -100$, $\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}(1,0) = -12$, $\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2}(1,0) = 0$.

Quindi $g_1(x_1,x_2) = 4(x_1-1) - 50(x_1-1)^2 - 12(x_1-1)x_2 + o\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

$g(x_1,x_2) = -4(x_1-1) - x_2 + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$

Esercizio 5 Sia $x_n(k) = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$

(a) $\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}n = n^{\frac{1}{4}}$

$\|x_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{n^2}{2n-1} = \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$

(b) Per il punto (a) abbiamo che $\|x_n\|_1 = n^{\frac{1}{4}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ quindi x_n non converge il l_1 perchè non è limitata in l_1.

Invece $\|x_n\|_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi $x_n \longrightarrow 0$ in l_2.

Esercizio 6 Sia $x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \leq n \\ \frac{1}{k^2} & \text{se } k > n \end{cases}$

(a) Per prima cosa osserviamo che $\forall n$ si ha che $x_n(k)$ è definitivamente uguale ad una successione l_1 e quindi $x_n \in l_p$ $\forall p \geq 1$.

Notiamo che $\|x_n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ quindi x_n non converge in l_1 perchè non è una successione limitata.

Invece se $p > 1$ allora $x_n \longrightarrow x$ in l_p dove $x(k) = \frac{1}{k}$. Infatti

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{k-1}{k^2}\right|^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

perchè è la coda di una serie convergente.

(b) $x_n \longrightarrow x$ anche in l_∞ perchè $\|x_n - x\|_\infty \leq \|x_n - x\|_2 \longrightarrow 0$

Esercizio 7 Sia $\Psi : \begin{array}{c} l_\infty \longrightarrow l_\infty \\ f \longrightarrow \Psi(f) \end{array}$ definita da $\Psi(x)(k) = \frac{k}{k+1} x(k)^2$;

(a) Cerchiamo i punti fissi di Ψ.

$\Psi(x) = x \iff \frac{k}{k+1} x(k)^2 = x(k)$ $\forall k \geq 1$. Sicuramete $x(k) = 0$ è un punto fisso di Ψ. D'altra parte supponendo che $x(k) \neq 0$ abbiamo che $\frac{k}{k+1} x(k) = 1 \Longrightarrow x(k) = \frac{k+1}{k}$. Quindi $x(k) = \frac{k+1}{k}$ è un secondo punto fisso di Ψ. Ψ non può essere una contrazione in l_∞ perchè ha più di un punto fisso.

(b) Sia $C = \{x \in l_\infty \mid |x(k)| \leq \frac{1}{3} \forall k\}$.

C è un sottoinsieme chiuso di l_∞ infatti $C = \{x \in l_\infty \mid \|x\|_\infty \leq \frac{1}{3}\}$ è un sottolivello della funzione continua $x \longrightarrow \|x\|_\infty$

Inolre se $x \in C$ allora $|\Psi(x)(k)| = \left|\frac{k}{k+1} x(k)^2\right| \leq |x(k)^2| \leq |x(k)| \leq \frac{1}{3}$ $\forall$ k pertanto $\Psi(C) \subseteq C$.

Infine $|\Psi(x)(k) - \Psi(y)(k)| = \frac{k}{k+1} |x(k)^2 - y(k)^2| \leq |x(k)^2 - y(k)^2| =$

$= |x(k) - y(k)||x(k) + y(k)| \leq |x(k) - y(k)|(|x(k)| + |y(k)|) \leq \frac{2}{3} |x(k) - y(k)| \leq$

$\leq \frac{2}{3} \|x - y\|_\infty$ $\forall$ $k \Longrightarrow \|\Psi(x) - \Psi(y)\|_\infty \leq \frac{2}{3} \|x - y\|_\infty$. Quindi Ψ è una contrazione in C.

Esercizio 8 $\Phi : \begin{array}{ccc} C([0,1]) & \longrightarrow & C([0,1]) \\ f & \longrightarrow & \Phi(f) \end{array}$ $\quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt$

$C = \{f \in C([0,1]) \mid 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall\, x \in [0,1]\}$.

(a) Sappiamo che C è un sottoinsieme chiuso di $(C([0,1]), \|\ \|_\infty)$ (vedi tutorato 2); inoltre se $f \in C$ allora

$\Phi(f)(x) \geq \frac{1}{2} \geq 0$ e $\phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t\, 2te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-te^{-t^2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Quindi $\Phi(C) \subseteq C$.

Inoltre $\forall x \in [0,1]$ si ha che

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left| \int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt - \int_{g(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \right| =$$

$$= \left| \int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt - \int_{f(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt + \int_{f(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt + \right.$$
$$\left. - \int_{g(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \right| \leq \left| \int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt - \int_{f(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \right| +$$
$$+ \left| \int_{f(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt - \int_{g(x)}^{\infty} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \right| =$$
$$= \left| \int_{f(x)}^{\infty} t^2 (f(e^{-t^2}) - g(e^{-t^2}))\, e^{-t^2} dt \right| + \left| \int_{g(x)}^{f(x)} t^2 g(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt \right| \leq$$
$$\leq \int_{f(x)}^{\infty} t^2 |f(e^{-t^2}) - g(e^{-t^2})|\, e^{-t^2} dt + \left| \int_{g(x)}^{f(x)} t^2\, e^{-t^2} dt \right| \leq$$
$$\leq \|f-g\|_\infty \int_{f(x)}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt + \left| \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{1}{e} dt \right| \leq \|f-g\|_\infty \int_{0}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt +$$
$$+ \frac{1}{e}|f(x)-g(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4}\|f-g\|_\infty + \frac{1}{e}\|f-g\|_\infty = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{1}{e}\right)\|f-g\|_\infty$$

con $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4} + \dfrac{1}{e} < 1$ (abbiamo usato il fatto che $t^2 e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{e}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$)

(b) Sia u il punto fisso di Φ in C. Sia $u_0(x) = 0\ \forall x \in C$. Per la dimostrazione del teorema delle contrazioni si ha che la successione di funzioni $\Phi^n(u_0)$ converge in $C([0,1])$ al punto fisso u. Ma $u_1(x) = \Phi(u_0)(x) = \frac{1}{2} = c_1\ \forall\ x \in [0,1]$, $u_2(x) = \Phi(u_1)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = c_2$ e allo stesso modo per ricorsione si ha che $u_n(x) = \Phi^n(u_0)(x)$ è una funzione costante $\forall\, n$. Ma allora u è limite di una successione di funzioni costanti e quindi è costante.