Appello B di AM3 - 15/6/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Abbiamo $F(0,0)=(0,0)$ e

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{1+y}{1+x^2+y^2}-2\frac{x^2(1+y)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x}{1+x^2+y^2}-2\frac{xy(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x}{1+xy^2}-\frac{y^2(y+x^2)}{(1+xy^2)^2} & \frac{1}{1+xy^2}-\frac{2xy(x^2+y)}{(1+xy^2)^2} \end{pmatrix}.$$

In particolare $DF(0,0)=\mathrm{Id}$ è una matrice 2×2 invertibile, e quindi la mappa F è localmente invertibile in $(0,0)$. Dobbiamo trovare $\rho>0$ piccolo tale che

$$\sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)}\|\mathrm{Id}-DF(x,y)\|_\infty\le\frac{1}{4}.$$

Sia $\rho<\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Dalle stime

$$\begin{aligned}
&|1-\frac{1+y}{1+x^2+y^2}+2\frac{x^2(1+y)}{(1+x^2+y^2)^2}|\le|(1+x^2+y^2)-(1+y)|+4x^2\le 7\rho,\\
&|\frac{x}{1+x^2+y^2}-2\frac{xy(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}|\le|x|+4|xy|\le 5\rho,\\
&|\frac{2x}{1+xy^2}-\frac{y^2(y+x^2)}{(1+xy^2)^2}|\le 4|x|+4y^2|x^2+y|\le 12\rho\\
&|1-\frac{1}{1+xy^2}+\frac{2xy(x^2+y)}{(1+xy^2)^2}|\le 2|xy^2|+8|xy||x^2+y|\le 18\rho,
\end{aligned}$$

segue che ρ puó essere scelto come $\rho=\frac{1}{72}$ e $r=\frac{1}{144}$. Ossia la mappa inversa G è definita da $B_{\frac{1}{144}}(0,0)$ a valori in $B_{\frac{1}{72}}(0,0)$.

Esercizio 2
Studiamo i punti critici vincolati di $f(x,y,z)$ su

$$\hat{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=1-x^2-y^2\}$$

con $z>0$. Il sistema

$$x(1-\lambda)=0\ ,\ \ y(2-\lambda)=0\ ,\ \ 6z=\lambda$$

ammette le seguenti soluzioni:

$$P=(0,0,1)\ ,\ \ Q_\pm=(0,\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{3})\ ,\ \ M_\pm=(\pm\sqrt{\frac{5}{6}},0,\frac{1}{6}).$$

Abbiamo che

$$f(P)=3\ ,\ \ f(Q_\pm)=\frac{5}{3}\ ,\ \ f(M_\pm)=\frac{11}{12}.$$

Studiamo adesso $f(x,y,z)$ su

$$S_0=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=1\},$$

ove la funzione f prende la forma $f = 1 + y^2$, ed ha quindi valore minimo 1 e massimo 2. Allora

$$\max_S f = f(P) = 3\,, \qquad \min_S f = f(M_\pm) = \frac{11}{12}.$$

Esercizio 3
Introduciamo coordinate cilindriche rispetto all'origine:

$$x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Il solido M in considerazione si scrive in tali coordinate come

$$M = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) :\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi],\ \rho \le a\cos\theta,\ |z| \le \sqrt{a^2 - \rho^2}\}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \text{vol }(M) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\ |_0^{a\cos\theta} \\ &= -\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1)d\theta = \frac{2}{3}a^3(\pi - \frac{4}{3}). \end{aligned}$$