Appello X di AM3 - 14/9/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Abbiamo che

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = 0$$

se e soltanto se almeno due delle variabili del punto sono nulle. La funzione f è nulla in tali punti che, come vedremo, non contribuiscono né al massimo né al minimo della funzione f su E. Studiamo i punti critici vincolati sul bordo $\{x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$:

$$yz = \lambda x,\ xz = 2\lambda y,\ xy = 3\lambda z,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Se $\lambda = 0$, come prima almeno due variabili si devono annullare e la funzione f sarebbe nulla in tali punti. Se $\lambda \neq 0$, abbiamo che

$$x^2 = 2y^2 = 3z^2 = \frac{xyz}{\lambda},$$

e quindi dalla relazione vincolare otteniamo

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6},\ z = \pm\frac{1}{3}$$

(tutte le possibili combinazioni di segni sono accettabili per un totale di 9 punti distinti). Abbiamo quindi che $\max_E f = \frac{\sqrt{2}}{18}$ ed è raggiunto nei 4 punti:

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{3}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{3}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{1}{3}),\ (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{1}{3}).$$

Similmente $\min_E f = -\frac{\sqrt{2}}{18}$ ed è raggiunto negli altri 4 punti:

$$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{1}{3}),\ (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{1}{3}),\ (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{3}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{3}).$$

Esercizio 2
Si potrebbe usare la formula per l'area delle superfici di rotazione. Facciamo invece il conto diretto con la parametrizzazione di S data da

$$\varphi : (\theta, \psi) \in (0, 2\pi)^2 \longmapsto ((b + a\cos\theta)\cos\psi, (b + a\cos\theta)\sin\psi, a\sin\theta).$$

Abbiamo che

$$\varphi_\theta = (-a\sin\theta\cos\psi, -a\sin\theta\sin\psi, a\cos\theta),\ \varphi_\psi = (-(b + a\cos\theta)\sin\psi, (b + a\cos\theta)\cos\psi, 0).$$

Abbiamo quindi che

$$|\varphi_\theta \wedge \varphi_\psi| = |\,(-a(b + a\cos\theta)\cos\theta\cos\psi, -a(b + a\cos\theta)\cos\theta\sin\psi, -a(b + a\cos\theta)\sin\theta)\,| = a(b+a\cos\theta).$$

Allora

$$\text{Area }(S) = \int_{[0,2\pi]^2} a(b + a\cos\theta)d\theta d\psi = 4ab\pi^2.$$

Esercizio 3

a) E' immediato verificare la chiusura di ω.

b) La curva γ è contenuta all'interno della curva γ_1 di equazione cartesiana $x^2+y^6=1$ con tangenza solo nei punti $(\pm 1,0)$. Poiché la forma ω è chiusa, dal Teorema di Gauss-Green abbiamo che

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega .$$

Una parametrizzazione di γ_1 è data da

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin^{\frac{1}{3}} t) \ , \ \ t \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo che tale parametrizzazione non è regolare nei punti $(\pm 1, 0)$. Si potrebbe riparametrizzare la curva $\gamma_1(t)$ per t vicino a $0, \pi, 2\pi$ in maniera da renderla regolare. Oppure, piú semplicemente possiamo procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \omega &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\{\gamma_1(t)\colon t \in [\epsilon, \pi-\epsilon] \cup [\pi+\epsilon, 2\pi-\epsilon]\}} \omega \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{[\epsilon, \pi-\epsilon] \cup [\pi+\epsilon, 2\pi-\epsilon]} \left((-\sin t)(-\sin t) + 3 \sin^{\frac{2}{3}} t \cos t \times \frac{1}{3} \sin^{-\frac{2}{3}} t \cos t \right) = 2\pi .
\end{aligned}$$