II Esonero di AM3 - 27/5/2009 Soluzioni

Esercizio 1
In coordinate radiali l'insieme E diventa

$$E = \{(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) : \ r \in [0,1], \ \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]\},$$

e quindi

$$\int_E x^2 dxdydz = (\int_0^1 r^4 dr)(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\varphi d\varphi) = \frac{\pi}{5}(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{3}).$$

Esercizio 2
a) Ovvia.
b) Data ψ la circonferenza unitaria oientata positivamente, si ha che

$$\int_\psi \omega = 2\pi.$$

Sia

$$A = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \setminus \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tale che $\partial^+ A = \gamma - \psi$. Dal teorema di Gauss-Green segue che

$$\int_\gamma \omega - \int_\psi \omega = \int_{\partial^+ A} \omega = \int_A (\partial_x \frac{x}{x^2+y^2} - \partial_y \frac{-y}{x^2+y^2}) = 0$$

per la chiusura di ω. Si ha quindi che

$$\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega = 2\pi.$$

Esercizio 3
Sia S la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x + z = 0\}$$

tale che $\partial^+ S = C$, e sia $F = (y - z, z - x, x - y)$ il campo vettoriale associato a ω. La superficie S è parametrizzata da

$$\varphi : (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \to (x, y, 1 - x) \in S.$$

Abbiamo quindi che

$$ndS = \partial_x \varphi \wedge \partial_y \varphi = (1, 0, -1) \wedge (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

e

$$\text{rot } F = (-2, -2, -2).$$

Si ha quindi che

$$\int_S \text{rot } F \cdot n dS = -4 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dxdy = -4\pi.$$

D'altra parte la curva $\partial^+ S = C$ è parametrizzata da

$$\gamma : \ t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t, 1 - \cos t) \in \partial^+ S,$$

ed allora

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ S} \omega &= \int_0^{2\pi} [-(\sin t - 1 + \cos t) \sin t + (1 - 2\cos t) \cos t + (\cos t - \sin t) \sin t] \, dt \\
&= -2 \int_0^{2\pi} dt = -4\pi.
\end{aligned}$$