

AM3 tutorato 2

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 2 del 4 Marzo 2009

Esercizio 1 Sia $F = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid 0 \leq f(x) \leq 1\}$ e sia $\Phi : F \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ la mappa definita da $\Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)dt$:

- (a) Provare che F è un sottoinsieme chiuso di $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
- (b) Mostrare che $\Phi(F) \subseteq F$ e che Φ è una contrazione in F .

Esercizio 2 Sia $E = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle successioni reali e sia $x \in E$; Provare che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \forall p \geq 1$ e che $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ se $p \geq q$.

Esercizio 3 Sia $x_n(k) = \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{(k+1)!}}$;

Calcolare $\|x_n\|_2$ e discutere la convergenza di x_n in l_1 e in l_2 .

Esercizio 4 Sia $x_n(k) = \frac{1}{k} \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{kn}}}$.

- (a) Mostrare che $x_n \in l_p \forall p > 1$.
- (b) Provare che x_n converge in $l_p \forall p > 1$ ad una opportuna successione x e che $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$.

Esercizio 5 Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$

Esercizio 6 Provare che l'equazione $e^{-\frac{x^3}{7} \cos^2 x} = x$ ha una unica soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 7 Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_1^e x^2 \log^2 x \, dx$
- (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, dx$
- (c) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx$
- (d) $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$
- (e) $\int_{-2}^0 \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, dx$