Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 tutorato 1

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 1 del 25 Febbraio 2009

Esercizio 1

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx \right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

2. $\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$. Ponendo $x = \sin t, dx = \cos t dt$ si ha
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \, \cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin 4t dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\cos 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

3. $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2(x^2+3)} \, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+3} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+3} dx =$
$= -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} - \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1} dx \overset{y=\frac{x}{\sqrt{3}}}{=} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{1}{y^2+1} dy = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan y \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty}$
$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2} \, dx \overset{y=e^x}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{(y^2+1)^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{1+y^2}{(y^2+1)^2} - \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy =$
$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y \frac{-2y}{(1+y^2)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1+y^2} \right) dy = \frac{\pi}{2} +$
$+ \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y^2}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Esercizio 2

(a) Per il teorema di lagrange $|\sin x| = |\cos \xi||x| \le |x|$ con $\xi \in [0, x]$.

(b) $|1 - \cos x| = \left| \int_0^x \sin t dt \right| \le \int_0^{|x|} |\sin t| dt \le \int_0^{|x|} t dt = \frac{1}{2}t^2$

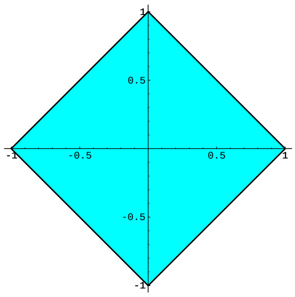
(c) $|e^x - 1| = e^{\xi}|x| \le e^{|x|}|x| \le e|x| \le 3|x|$

(d) $|\log(1+x)| = \frac{1}{1+\xi}|x| \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}}|x| = 2|x|$

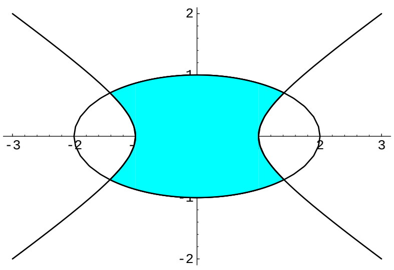
(e) $|\sin x - x| = \left| \int_0^x \cos t - 1 dt \right| \le \int_0^{|x|} |\cos t - 1| dt \le \int_0^{|x|} \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{6}|x|^3$

Esercizio 3 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

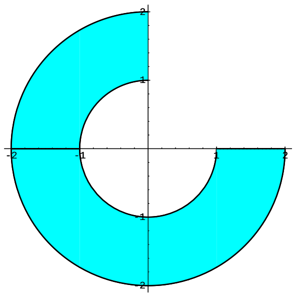
(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |y| \leq 1 - |x|, \ -1 \leq x \leq 1\}$;



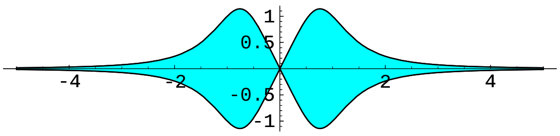
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 4y^2 \leq 4, \ x^2 - 2y^2 \leq 1\}$;



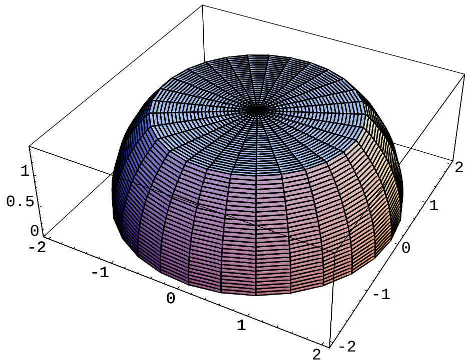
(c) $C = \{(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 \leq \rho \leq 2, \ \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\}$;



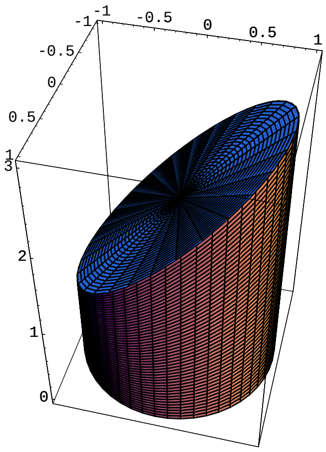
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |y| \leq \dfrac{2|x|}{(x^4 + 1)}\}$;



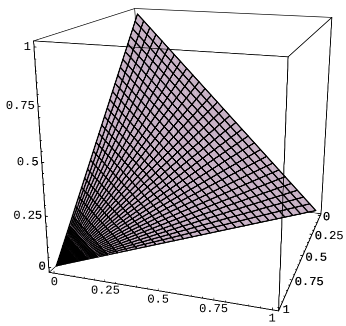
Esercizio 4 (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \; 0 \leq z \leq 1\}$;



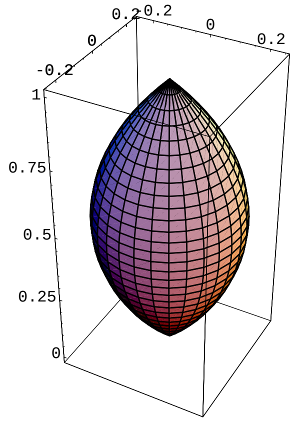
(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq 2 + y\}$;



(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y + z = 1, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0\}$;



(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 \leq z^2(1-z)^2\}$;



Esercizio 5 Sia $(E, \| \ \|)$ uno spazio normato. Per la proprietà triangolare si ha che $\forall \ x, y \in E$ $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Allo stesso modo $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\| \Longrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Dunque $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ ovvero $| \ \|x\| - \|y\| \ | \leq \|x - y\|$. Questo ci dice che la norma è una funzione lipschitziana (e quindi anche continua) su E.

Esercizio 6 (a) $\|x\|_1 \geq 0$ e $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = 0 \Leftrightarrow x(n) = 0 \forall \ n \Leftrightarrow x = 0$;

$$\|tx\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |tx(n)| = |t| \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = |t| \ \|x\|_1$$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

quindi $\| \ \|_1$ è una norma su E.

(b) Sia $x_n \in E_c$ e tale che $x_n \longrightarrow x$; siccome la norma è continua allora $\|x_n\|_1 \longrightarrow \|x\|_1$, e dunque dato che $\|x_n\|_1 \leq c$ si ha che $\|x\|_1 \leq c$ ovvero $x \in E_c$. Quindi E_c è chiuso. (Si ricordi che un sottoinsieme $C \subseteq E$ è chiuso $\Longleftrightarrow x_n \in C$ e $x_n \longrightarrow x \Rightarrow x \in C$).

(c) Per prima cosa notiamo che se $x \in E_1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \leq 1$ e quindi $\forall \ n$ si ha $|x(n)| \leq 1$. Pertanto $\|\Phi(x)(n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^2}{2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \leq 1$ e dunque $\Phi(E_1) \subseteq E_1$. Inoltre Φ è una contrazione su E_1 perchè se $x, y \in E_1$ allora

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} |x(n)^2 - y(n)^2| \leq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)^2 - y(n)^2| =$$

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)||x(n) + y(n)| \leq \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)| = \frac{2}{3} \|x - y\|_1$$

Esercizio 7 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \arctan x}{(1 + \cos^2 x) \cosh x} \log(1 + |x|) dx = 0$ perchè è l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine.