Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 soluzioni tutorato 2

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 2 del 4 Marzo 2009

Esercizio 1 (a) Sia $f_n \in F$ tale che $f_n \stackrel{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$. Poichè f_n è continua in $[0,1]$ e la convergenza uniforme conserva la continuità allora $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Inoltre siccome $0 \le f_n \le 1$ allora passando al limite si ha che $0 \le f(x) \le 1$ quindi $f \in F$. Pertanto F è un sottoinsieme chiuso di $C([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Per il teorema fondamentale del calcolo si ha che $\forall\ f \in F$ $\Phi(f)$ è una funzione di classe C^1 (e quindi continua) nell'intervallo $[0,1]$. Inoltre

$$0 \le \Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)\,dt \le \frac{1}{2} + \int_0^x tdt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quindi $\Phi(f) \in F$ $\forall f \in F$ ovvero $\Phi(F) \subseteq F$.
Per far vedere che Φ è una contrazione basta osservare che se $f, g \in F$ allora $\forall\ x \in [0,1]$ si ha

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left| \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)dt - \frac{1}{2} - \int_0^x tg(t)dt \right| = \left| \int_0^x t(f(t)-g(t))dt \right|$$

$$\le \int_0^x t|f(t)-g(t)|dt \le \int_0^x t\|f-g\|_\infty dt = \|f-g\|_\infty \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2\|f-g\|_\infty \le$$

$\le \dfrac{1}{2}\|f-g\|_\infty$ e quindi passando al sup si ottiene

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

Pertanto Φ è una contrazione su F.

Esercizio 2 Sia $E = \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle successioni reali e sia $x \in E$; Per definizione abbiamo che $\|x\|_\infty = \sup_k |x(k)|$. Se $x \notin l_p$ allora $\|x\|_p = \infty$ e quindi sicuramente $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$. Se invece $x \in l_p$ allora $|x(n)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi $\|x\|_\infty = \sup_k |x(k)| = \max_k |x(k)| = x(\tilde{k})$ per un opportuno $\tilde{k}$. Ma allora $\|x\|_\infty = |x(\tilde{k})|^{p\,\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^\infty |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$.

Se $p \ge q$ allora $\|x\|_p^p = \sum_{k=0}^\infty |x(k)|^p = \sum_{k=0}^\infty |x(k)|^{p-q}|x(k)|^q \le \sum_{k=0}^\infty \|x\|_\infty^{p-q}|x(k)|^q =$

$\le \|x\|_\infty \sum_{k=0}^\infty |x(k)|^q = \|x\|_\infty^{p-q}\|x\|_q^q \le \|x\|_q^{p-q}\|x\|_q^q = \|x\|_q^p \Longrightarrow \|x\|_p \le \|x\|_q$

Esercizio 3 Sia $x_n(k) = \dfrac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{(k+1)!}}$;

$$\|x_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{n^{2k+1}(k+1)!} = n\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{n^{2k+2}(k+1)!} = n\sum_{k=0}^\infty \frac{(\frac{1}{n^2})^{k+1}}{(k+1)!} = n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1).$$

Siccome $\|x_n\|_2 = \sqrt{n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ allora $x_n \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. Inoltre

$$\|x_1\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{(k+1)!}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Esercizio 4 Sia $x_n(k) = \dfrac{1}{k}\sqrt{2 - \cos\dfrac{\pi}{\sqrt{kn}}}$.

(a) Per il criterio del confronto asintotico x_n ha lo stesso comportamento della successione $\frac{1}{k}$ e quindi $x_n \in l^p$ per $p > 1$ e $x_n \notin l_1$.

(b) Sia $x(k) = \frac{1}{k}$ allora $\forall p \geq 1$ si ha che

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{k}\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}} - \frac{1}{k}\right|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}\left|\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}} - 1\right|^p \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}\left|\frac{(\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}}-1)(\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}}+1)}{\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}}+1}\right|^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}\frac{|1-\cos\frac{1}{\sqrt{kn}}|^p}{\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{\sqrt{kn}}}+1}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}\left|1-\cos\frac{1}{\sqrt{kn}}\right|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}\left(\frac{1}{2kn}\right)^p = \frac{1}{(2n)^p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pertanto per $p > 1$ abbiamo che $x_n \stackrel{\|\|_p}{\longrightarrow} x$ e per $p = 1$ che $\|x_n - x\|_1 \longrightarrow 0$.

Esercizio 5 $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$

Sia $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Osserviamo che $f([0,\infty)) \subseteq [0,\infty)$ e che f è una contrazione in $[0,\infty)$ infatti siccome $|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right| \leq \dfrac{1}{4}$ per il teorema di Lagrange si ha che $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$. Per la dimostrazione del teorema delle contrazioni si ha che $x_n \longrightarrow y$ dove y è l'unico punto fisso di f in $[0,\infty)$. Cerchiamo dunque il punto fisso di f risolvendo l'equazione $f(x) = x$. $\frac{1}{x+2} = x \Longrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$. Ma -$\sqrt{2} - 1 < 0$ quindi il punto fisso di f in $[0,\infty)$ è $\sqrt{2} - 1$. Si ha quindi che $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} - 1$

Esercizio 6 Sia $f(x) = e^{-\frac{x^3}{7}\cos^2 x}$. Facciamo vedere che f è una contrazione nell'intervallo $[0,1]$. $|f'(x)| = e^{-\frac{x^3}{7}\cos^2 x}\left|-\dfrac{3}{7}x^2\cos^2 x + \dfrac{2}{7}x^3\cos x\sin x\right| \leq \dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$ $\forall\ x, y \in [0,1]$. Quindi per il teorema di Lagrange si ha che $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{5}{7}|x-y|$ $\forall\, x, y \in [0,1]$ quindi f è una contrazione. Quindi per il teorema delle contrazioni la funzione f ha un unico punto fisso in $[0,1]$ cioè $\exists!\ x \in [0,1]$ tale che $f(x) = x$. Quindi l'equazione $f(x) = x$ ha una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 7

1. $$\int_1^e x^2\log^2 x\,dx = \frac{1}{3}x^3\log^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 2\log x\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\log x dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\log x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3\frac{1}{x}dx\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}\int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}e^3 - \frac{2}{27} = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 xdx\, dx = -\sin^3 x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\cos^2 xdx = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2xdx =$

$\displaystyle= -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = -\frac{1}{4} + \frac{3}{32}\pi$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx \overset{y=\sin x}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y^2}dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y^2}dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y+1}dy =$

$\displaystyle= \log\frac{y+1}{1-y}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \log 3$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}dx \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2+2t}\, dt =$

$\displaystyle= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t}\Bigg|_0^{\infty} = 2$

5. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)}\, dx$

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B+C=3 \\ 2A-C=2 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-1.$$

$\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+2x+2}dx = \log|x-1|\Bigg|_{-2}^{0} +$

$\displaystyle-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx = -\log 3 - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)\Bigg|_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx =$

$\displaystyle= -\log 3 + \int_{-2}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = -\log 3 + \arctan(x+1)\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{\pi}{2} - \log 3$