Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 soluzioni tutorato 3

A.A 2008-2009
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G.Mancini, E. Padulano
Tutorato 3 dell' 11 Marzo 2009

Esercizio 1 (a) $F(x,y) = 2 - e^{2y} - \cos x$ in $(0,0)$

F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0)$ tale che $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2e^{2y}\Big|_{(0,0)} = -2 \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita $\exists\ r, \rho > 0$ tali che $\sup\limits_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$ e $\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\left(\text{dove } T = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}\right)$ e per tali r, ρ $\exists g : B_r(0) \longrightarrow B_\rho(0)$ tale che, in un intorno di $(0,0)$, l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di g. Stimiamo i raggi r e ρ imponendo le condizioni $\sup\limits_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$ e $\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$:
$|F(x,0)| = |1 - \cos x| \leq \frac{1}{2}x^2 \leq \frac{1}{2}r^2$ quindi per avere $\sup\limits_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} = \rho$ (nel nostro caso $T = -\frac{1}{2}$ quindi $\|T\| = \frac{1}{2}$) possiamo prender r in modo tale che $\frac{1}{2}r^2 \leq \rho \Longrightarrow r \leq \sqrt{2\rho}$.
Inoltre supponendo $\rho < \frac{1}{2}$ si ha che
$\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - e^{2y}| \leq 6|y| \leq 6\rho$ quindi per avere $\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$ possiamo prendere $\rho \leq \frac{1}{12}$. Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{1}{12}$ e $r \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$.
Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di g: sappiamo che $\{F = 0\}$ è il grafico di g quindi si ha $F(x, g(x)) = 0 = 2 - e^{2g(x)} - \cos x\ \forall\ x \in B_r(0)$; derivando rispetto ad x otteniamo che $-2e^{2g(x)}g'(x) + \sin x = 0$. Calcolando in $x = 0$ e ricordando che $g(0) = 0$ otteniamo che $-2g'(0) = 0 \Longrightarrow g'(0) = 0$. Derivando nuovamente si ottiene che $-4e^{2g(x)}g'(x)^2 - 2e^{2g(x)}g''(x) + \cos x = 0$. Da questo ricaviamo che $g''(0) = \frac{1}{2}$. Pertanto lo sviluppo al secondo ordine di g è
$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$.

(b) $F(x_1, x_2, y) = y^2 + e^{x_1 x_2} - 2$ in $(0,0,1)$

F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0,1)$ tale che $F(0,0,1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) = 2y\Big|_{(0,0,1)} = 2$ dunque per il teorema della funzione implicita in un intorno di $(0,0,1)$ l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $y = g(x_1, x_2)$. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni di definizione di F: supponendo per semplicità che $r \leq 1$ si ha
$|F(x_1, x_2, 1)| = |e^{x_1x_2} - 1| \leq 3|x_1x_2| \leq \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{3}{2}r^2 \leq \frac{3}{2}r$ quindi per avere $\sup\limits_{x \in B_r(0,0)} |F(x_1, x_2, 0)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} = \rho$ (nel nostro caso $T = \frac{1}{2}$) possiamo prendere $r \leq \frac{2}{3}\rho$. Inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - y| \leq \rho$ quindi per avere

$\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0)}\left|1-T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ basta prendere $\rho \leq \frac{1}{2}$. Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{1}{2}$ e $r \leq \frac{1}{3}$.
Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di g: sappiamo che $\{F = 0\}$ è il grafico di g quindi si ha $F(x, g(x)) = 0 = g^2 + e^{x_1x_2} - 2$. Derivando in x_1 e x_2 otteniamo che
$2g\ g_{x_1} + x_2e^{x_1x_2} = 0$ e $2g\ g_{x_2} + x_1e^{x_1x_2} = 0$ calcolando in $(0, 0)$ siccome $g(0, 0) = 1$ abbiamo che $g_{x_1} = g_{x_2} = 0$. Derivando nuovamente in tutti i modi possibili otteniamo:
$2g_{x_1}^2 + 2g\ g_{x_1x_1} + x_2^2e^{x_1x_2} = 0$
$2g_{x_1}g_{x_2} + 2g\ g_{x_1x_2} + e^{x_1x_2} + x_1x_2e^{x_1x_2} = 0$
$2g_{x_2}^2 + 2g\ g_{x_2x_2} + x_1^2e^{x_1x_2} = 0$
Calcolando in $(0, 0)$ otteniamo $g_{x_1x_1} = g_{x_2x_2} = 0$ e $g_{x_1x_2} = -\frac{1}{2}$ quindi
$g(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{2}x_1x_2 + o(x^2 + y^2)$.

(c) $F(x_1, x_2, y) = 1 - \log(e + x_2) + \sin(2x_1x_2y) + x_1^2 - y^2$ in $(1, 0, -1)$
F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(1, 0, -1)$ tale che $F(1, 0, -1) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 0, -1) = 2x_1x_2 \cos(2x_1x_2y) - 2y\Big|_{(1,0,-1)} = 2$ dunque per il teorema della funzione implicita in un intorno di $(1, 0, -1)$ l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $g(x_1, x_2)$. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni di definizione di F (supponendo $r, \rho \leq 1$):
$|F(x_1, x_2, -1)| = |1 - \log(e + x_2) - \sin(2x_1x_2) + x_1^2 - 1| \leq |\log(e + x_2) - 1|+$
$+|\sin(2x_1x_2)| + |x_1^2 - 1| = |\log(e + x_2) - \log e| + 2|x_1x_2| + |x_1 - 1||x_1 + 1| \leq$
$\leq \left|\log(1 + \dfrac{x_2}{e})\right| + 4|x_2| + 3|x_1 - 1| \leq 2\dfrac{|x_2|}{e} + 4r + 3r \leq r + 7r = 8r$ quindi per avere $\sup\limits_{x\in B_r(0,0)} |F(x_1, x_2, 0)| \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|} = \rho$ (nel nostro caso $T = \frac{1}{2}$) possiamo prendere $r \leq \frac{\rho}{8}$. Inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 + y - x_1x_2 \cos(2x_1x_2)|$
$\leq |1 + y| + |x_1x_2| \leq \rho + 2|x_2| \leq \rho + 2r \leq \rho + \dfrac{\rho}{4}\rho = \dfrac{5}{4}\rho$ quindi per avere
$\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0)}\left|1-T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ basta prendere $\rho \leq \frac{2}{5}$. Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{2}{5}$ e $r \leq \frac{1}{20}$.
Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di g: sappiamo che $\{F = 0\}$ è il grafico di g quindi si ha $F(x, g(x)) = 0 = 1 - \log(e + x_2) + \sin(2x_1x_2g) + x_1^2 - g^2$.
Derivando in x_1 e x_2 otteniamo che
$2\cos(2x_1x_2g)(x_2g + x_1x_2g_{x_1}) + 2x_1 - 2g\ g_{x_1} = 0$
$-\frac{1}{(e+x_2)} + 2\cos(2x_1x_2g)(x_1g + x_1x_2g_{x_2}) - 2g\ g_{x_2} = 0$
calolando in $(1, 0)$ siccome $g(1, 0) = -1$ si ha $g_{x_1}(1, 0) = -1$ e $g_{x_2}(1, 0) = 1+\frac{1}{2e}$
Derivando le due relazioni precedenti otteniamo:
$-4\sin(2x_1x_2g)(x_2g+x_1x_2g_{x_1})^2+2\cos(2x_1x_2g)(2x_2g_{x_1}+x_2g_{x_1x_1})+2-2g_{x_1}^2-2gg_{x_1x_1} = 0$
$-4\sin(2x_1x_2g)(x_2g + x_1x_2g_{x_1})(x_1g + x_1x_2g_{x_2}) + 2\cos(2x_1x_2g)(g + x_2g_{x_2} + x_1g_{x_1} + x_1x_2g_{x_1x_2}) - 2g_{x_1}g_{x_2} - 2gg_{x_1x_2} = 0$
$\frac{1}{(e+x_2)^2} - 2\sin(2x_1x_2g)(x_1g+x_1x_2g_{x_2})^2+2\cos(2x_1x_2g)(2x_1g_{x_2}+x_1x_2g_{x_2x_2})-2g_{x_2}^2 - 2gg_{x_1x_2} = 0$
da cui ricaviamo $g_{x_1x_1}(1, 0) = 0$, $g_{x_1x_2}(1, 0) = 1 - \frac{1}{2e}$, $g_{x_2x_2}(1, 0) = -1 - \frac{1}{4e}$
Quindi lo sviluppo di Taylor di g in $(1, 0)$ è:
$g(x_1, x_2) = -1 - (x_1 - 1) + \left(1 + \frac{1}{2e}\right) x_2 + 2\left(1 - \frac{1}{2e}\right)(x_1 - 1)x_2 - \left(1 + \frac{1}{4e}\right) x_2^2+$
$+o((x_1 - 1)^2 + x_2^2)$

(d) $F(x,y) = \log x + \cos(xy)$ in $(1, \frac{\pi}{2})$ F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(1, \frac{\pi}{2})$ tale che $F(1, \frac{\pi}{2}) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1, \dfrac{\pi}{2}) = -x\sin(xy)\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})} = -1$ dunque per il teorema della funzione implicita in un intorno di $(1, \frac{\pi}{2})$ l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione g. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni di definizione di F: per semplicità supponiamo che $r \le \frac{1}{2}$ e $\rho \le 1$

$\left|F\left(x, \dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\log x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right| \le |\log(1+x-1)| + \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le$

$\le \dfrac{1}{2}|x-1| + \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)\right| \le 2r + \dfrac{\pi}{2}|x-1| \le 2r + \dfrac{\pi}{2}r \le 2r + 2r = 4r$

quindi per avere $\sup\limits_{x\in B_r(1)} |F(x,0)| \le \dfrac{\rho}{2\|T\|} = \dfrac{\rho}{2}$ (nel nostro caso $T = -1$) possiamo prendere $r \le \dfrac{\rho}{8}$. Inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 + \dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - x\sin(xy)| \le$

$\le |1-x| + |x - x\sin(xy)| \le |1-x| + |x||1-\sin(xy)| \le r + 2|1-\sin(xy)| =$

$r + 2\left|1 - \sin(xy - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2})\right| = r + 2\left|1 - \cos\left(xy - \dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le r + \left|xy - \dfrac{\pi}{2}\right|^2 \le r$

$+\left|xy - \dfrac{\pi}{2}\right| \le r + |xy - y| + \left|y - \dfrac{\pi}{2}\right| \le r + 3|x-1| + \rho \le 4r + \rho \le \dfrac{\rho}{2} + \rho = \dfrac{3}{2}\rho$

quindi per avere $\sup\limits_{B_r(1)\times B_\rho(\frac{\pi}{2})} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le \dfrac{1}{2}$ basta prendere $\rho \le \frac{1}{3}$. Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{1}{3}$ e $r \le \frac{1}{24}$.

Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di g: sappiamo che $\{F = 0\}$ è il grafico di g quindi si ha $F(x, g(x)) = 0$ cioè $\log x + \cos(xg) = 0 \ \forall\ x \in B_r(1)$.

Derivando in x si ottiene che

$\dfrac{1}{x} - \sin(xg)(g + xg') = 0 \Longrightarrow g'(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$

$-\dfrac{1}{x^2} - \cos(xg)(g + xg')^2 - \sin(xg)(2g' + xg'') = 0 \Longrightarrow g''(0) = \pi - 3.$

Quindi $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)(x-1) - \dfrac{\pi - 3}{2}(x-1)^2 + o(x-1)^2$

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R^2$ definita da

$F(x, y_1, y_2) = (\arctan x - e^{-y_1}\sin y_2, e^{x-y_1} - \sin(xy_2) - \cosh y_1)$

(a) F è una funzione di classe C^1 in $(0,0,0)$ con $F(0,0,0) = (0,0)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = \left|\begin{pmatrix} e^{-y_1}\sin y_2 & -e^{-y_1}\cos y_2 \\ -e^{x-y_1} - \sinh y_1 & -x\cos(xy_2)\end{pmatrix}\right|_{0,0,0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Siccome $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)$ è invertibile (e $T = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$) allora per il teorema della funzione implicita $\exists\ r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(0) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ ($g = (g_1(x), g_2(x))$) di classe C^1 tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) = 0\ \forall\ x \in B_r(0)$.

(b) Stimiamo i raggi r e ρ supponendo $r, \rho \le \frac{1}{2}$:

$F(x,0,0) = (\arctan x, e^x - 1)$; siccome $|\arctan x| \le |x| \le r$ e $|e^x - 1| \le 3|x| \le 3r$ allora abbiamo che $|F(x,0)| \le \sqrt{r^2 + 9r^2} = \sqrt{10}r \le 4r$. Tenendo conto del fatto che $\|T\| \le 2\|T\|_\infty = 2$ allora prendendo $r \le \frac{\rho}{16}$ abbiamo che $\sup\limits_{x\in B_r(0,0)} |F(x,0,0)| \le \dfrac{\rho}{2\|T\|}$.

$$Id - T\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-y_1}\sin y_2 & -e^{-y_1}\cos y_2 \\ -e^{x-y_1} - \sinh y_1 & -x\cos(xy_2)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - e^{x-y_1} - \sinh y_1 & -x\cos(xy_2) \\ e^{-y_1}\sin y_2 & 1 - e^{-y_1}\cos y_2\end{pmatrix}$$

Stimiamo le singole componenti di questa matrice

$|1-e^{x-y_1}-\sinh y_1| \leq |1-e^{x-y_1}|+\frac{1}{2}|e^{y_1}-e^{-y_1}| \leq 3|x-y_1|+$
$+\frac{1}{2}|e^{y_1}-1+1-e^{-y_1}| \leq 3|x|+3|y_1|+3|y_1| \leq 3r+6\rho \leq \frac{3}{16}\rho+6\rho \leq \frac{25}{4}\rho$
$|-x\cos(xy_2)| \leq |x| \leq r \leq \frac{\rho}{16}$
$|e^{-y_1}\sin y_2| \leq 3|y_2| \leq 3\rho$
$|1-e^{-y_1}\cos y_2| \leq |1-e^{y_1}|+e^{y_1}|1-\cos y_2| \leq 3|y_1|+\frac{3}{2}|y_2|^2 \leq 3\rho+\frac{3}{2}\rho^2 =$
$= 3\rho+\frac{3}{2}\rho = \frac{9}{2}\rho$
Ne segue che $\|Id-T\frac{\partial F}{\partial y}\|_\infty \leq \frac{25}{4}\rho$
Se prediamo $\frac{25}{4}\rho \leq \frac{1}{4}$ cioè $\rho \leq \frac{1}{25}$ abbiamo che
$$\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)}\left\|1-T\frac{\partial F}{\partial y}\right\| \leq 2\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)}\left\|1-T\frac{\partial F}{\partial y}\right\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$
Prendiamo quindi $\rho=\frac{1}{25}$ e $r \leq \frac{1}{400}$.

(c) Determiniamo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g. Sappiamo che $F(x,g_1(x),g_2(x))=0$ cioè che
$\arctan x - e^{-g_1}\sin g_2 = 0$ e $e^{x-g_1}-\sin(xg_2)-\cosh g_1$. Derivando in x otteniamo che
$\frac{1}{1+x^2}+g_1'e^{-g_1}\sin g_2 - e^{-g_1}\cos g_2\, g_2' = 0$
$e^{x-g_1}(1-g_1')-\cos(xg_2)(g_2+xg_2')-\sinh g_1\, g_1' = 0$
da cui $g_1'(0)=g_2'(0)=1$.
$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+g_1''e^{-g_1}\sin g_2 - g_1'^2e^{-g_1}\sin g_2 + g_1'g_2'e^{-g_1}\cos g_2 + g_1'g_2'e^{-g_1}\cos g_2 +$
$e^{-g_1}\sin g_2\, g_2'^2 - e^{-g_1}\cos g_2\, g_2'' = 0$
$e^{x-g_1}(1-g_1')^2 - g_1''e^{x-g_1}+\sin(xg_2)(g_2+xg_2')^2-\cos(xg_2)(g_2'+g_2'+xg_2'')-$
$\cosh g_1\, g_1'^2 - \sinh g_1\, g_1'' = 0$
da cui $g_1''=-3$ e $g_2''=2$. Quindi lo sviluppo di Taylor della funzione g è:
$g(x)=(g_1(x),g_2(x))=\left(x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2),\ x+x^2+o(x^2)\right)$

Esercizio 3 Sia $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da
$F(x,y)=(x^3+x\log(1+y)+2\cos(x+\frac{\pi}{2}), \arctan y - e^{x^2}\cos x)$

(a) $J_F(x,y)=\begin{pmatrix} 3x^2+\log(1+y)-2\sin(x+\frac{\pi}{2}) & \frac{x}{1+y} \\ -2xe^{x^2}\cos x+\sin x\, e^{x^2} & \frac{1}{1+y^2}\end{pmatrix}$
$J_F(0,0)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ che è una matrice invertibile quindi per il teorema della funzione implicita $\exists$ una funzione $g: B_r(0,-1) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1 tale che $F(g(u,v))=(u,v)\ \forall\ (u,v)\in B_r(0,-1)$.

(b) Dobbiamo imporre che $\sup_{B_\rho(0,0)}\|Id-TJ_f(x,y)\| \leq \frac{1}{2}$ e che $r \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$.
Per far questo prendiamo r,ρ in modo tale che $\sup_{B_\rho(0,0)}\|Id-TJ_f(x,y)\|_\infty \leq \frac{1}{4}$
e che $r \leq \frac{\rho}{4\|T\|_\infty}$.
Nel nostro caso si ha che $J_F(0,0)=T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ quindi
$$Id-TJ_F(x,y)=Id-\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x^2+\log(1+y)-2\sin(x+\frac{\pi}{2}) & \frac{x}{1+y} \\ -2xe^{x^2}\cos x+\sin x\, e^{x^2} & \frac{1}{1+y^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\log(1+y)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}\frac{x}{1+y} \\ 2xe^{x^2}\cos x-\sin x\, e^{x^2} & 1-\frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

$|1+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\log(1+y)-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)| \leq \dfrac{3}{2}x^2+|y|+\left|1-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leq \dfrac{3}{2}\rho$
$+\rho+|1-\cos x| \leq \dfrac{3}{2}\rho+\rho+\dfrac{1}{2}\rho = 3\rho$

$\left|\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+y}\right| \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{|x|}{|1+y|} \leq |x| \leq \rho$

$|2xe^{x^2}\cos x-\sin xe^{x^2}| \leq 6|x|+3|x| \leq 9\rho$

$\left|1-\dfrac{1}{1+y^2}\right| = \left|\dfrac{y^2}{1+y^2}\right| \leq |y|^2 \leq \rho^2 \leq \rho$

Quindi $\|Id-TJ_f(x,y)\|_\infty \leq 9\rho$. Per avere $\sup\limits_{B_\rho(0,0)} \|Id-TJ_f(x,y)\|_\infty \leq \dfrac{1}{4}$ possiamo prendere $\rho \leq \frac{1}{36}$. Si può quindi prendere $\rho = \frac{1}{36}$ e $r \leq \frac{1}{4}\rho$

(c) Per determinare lo sviluppo di Taylor della funzione g sfruttiamo il fatto che $J_g(0,-1) = J_f(0,0)^{-1} = T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $g(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{u^2+(v+1)^2}\right) =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u+o\left(\sqrt{u^2+(v+1)^2}\right) \\ v+1+o\left(\sqrt{u^2+(v+1)^2}\right) \end{pmatrix}$

Esercizio 4 $\forall\, x \in [0,1]$ si ha che $|\Phi(f)(x)-\Phi(g)(x)| \leq \left|\displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{f(t)}{1+t^2}\right)-\sin\left(\frac{g(t)}{1+t^2}\right)dt\right| \leq$

$\leq \displaystyle\int_0^x \left|\sin\left(\frac{f(t)}{1+t^2}\right)-\sin\left(\frac{g(t)}{1+t^2}\right)\right|dt \leq \int_0^x \frac{|f(t)-g(t)|}{1+t^2}dt \leq \int_0^x \frac{\|f-g\|_\infty}{1+t^2}dt =$

$= \arctan t\Big|_0^x \|f-g\|_\infty = \arctan x\, \|f-g\|_\infty = \dfrac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty.$

Dunque $\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty \leq \dfrac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty$ e quindi Φ è una contrazione.

Esercizio 5 (a) $x_n(k) = \dfrac{\pi+\sin\left(\frac{3}{nk}\right)}{k}$.

Notiamo che $x_n \in l_p$ per $p>1$ e che $x_n \notin l_1$. Inoltre se consideriamo la successione $x(k) = \dfrac{\pi}{k}$ si ha che $\forall\, p \geq 1 \quad \|x_n-x\|_p \leq \|x_n-x\|_1 =$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \left|\frac{\pi+\sin\left(\frac{3}{nk}\right)}{k}-\frac{\pi}{k}\right| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\left|\sin\left(\frac{3}{nk}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{3}{nk^2} = \frac{1}{n}\frac{\pi^2}{2} \overset{n\to 0}{\longrightarrow} 0.$

Possiamo concluderne che per $p>1$ $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in l_p e che per $p=1$, anche se $x_n, x \notin l_1$, $x_n-x \in l_1$ e $x_n-x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in l_1.

(b) $x_n(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2k^2+1)^i}$.

$\forall n$ si ha $x_n \in l_p$ perchè $x_n(k) = \frac{1}{2k^2+1}+\frac{1}{(2k^2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2k^2+1)^n}$ è uua somma finita di successioni di l_p. Per studiare la convergeza di x_n conviene osservare che $x_n(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2k^2+1)^i} = \frac{1}{2k^2+1}\frac{1-\frac{1}{(2k^2+1)^{n+1}}}{1-\frac{1}{2k^2+1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2k^2+1}\right)^{n+1}}{2k^2}$

Sia $x(k) = \dfrac{1}{2k^2}$ allora si ha che

$$\|x_n - x\|_p \leq \|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1 - \left(\frac{1}{2k^2+1}\right)^{n+1}}{2k^2} - \frac{1}{2k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2k^2+1}\right)^{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{\pi^2}{12} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$