Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 soluzioni tutorato 4

A.A 2008-2009
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G.Mancini, E. Padulano
Tutorato 4 del 18 Marzo 2009

Esercizio 1 $F(x,y) = \left(e^{\sin y} + \cos(x^2) - 2,\ \dfrac{\cos x}{1+y^2} - e^{\frac{x}{2}} + 1 \right)$

(a) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2) & e^{\sin y}\cos y \\ \frac{-\sin x}{1+y^2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & \frac{-2y\cos x}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$

La matrice jacobiana di F nel punto $(0,0)$ è $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ che è una matrice invertibile quindi per il teorema della funzione inversa F è invertibile in un intorno di $(0,0)$. In altri termini $\exists\ r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(F(0,0)) = B_r(0,1) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1 tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall\ (u,v) \in B_r(0,1)$.

(b) Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g.

Sia $T = J_F(0,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dobbiamo imporre che $\sup\limits_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_f(x,y)\| \leq \dfrac{1}{2}$ e che $r \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$. Per far questo è sufficiente prendere r e ρ in modo tale che $\sup\limits_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_f(x,y)\|_\infty \leq \dfrac{1}{4}$ e $r \leq \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \dfrac{\rho}{8}$.

$Id - TJ_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2) & e^{\sin y}\cos y \\ \frac{-\sin x}{1+y^2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & \frac{-2y\cos x}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\sin x}{1+y^2} - e^{\frac{x}{2}} & \frac{-4y\cos x}{(1+y^2)^2} \\ 2x\sin(x^2) & 1 - e^{\sin y}\cos y \end{pmatrix}$

$\left| 1 - \dfrac{2\sin x}{1+y^2} - e^{\frac{x}{2}} \right| \leq \left| \dfrac{2\sin x}{1+y^2} \right| + \left|1 - e^{\frac{x}{2}}\right| \leq 2|\sin x| + \dfrac{3}{2}|x| \leq 2|x| + \dfrac{3}{2}\rho \leq \dfrac{7}{2}\rho$

$\left| \dfrac{-4y\cos x}{(1+y^2)^2} \right| \leq 4|y| \leq 4\rho$

$\left|2x\sin(x^2)\right| \leq 2|x^3| \leq 2\rho^3 \leq 2\rho$

$\left|1 - e^{\sin y}\cos y\right| \leq |1 - \cos y| + \left|\cos y - e^{\sin y}\cos y\right| \leq \dfrac{1}{2}|y|^2 + |\cos y||1 - e^{\sin y}| \leq$

$\leq \dfrac{1}{2}\rho^2 + 3|\sin y| \leq \dfrac{1}{2}\rho + 3|y| \leq \dfrac{1}{2}\rho + 3\rho = \dfrac{7}{2}\rho$

Quindi $\sup\limits_{B_\rho(0,0)} \|Id - TJ_f(x,y)\|_\infty \leq 4\rho \leq \dfrac{1}{4}$ se $\rho \leq \dfrac{1}{16}$

Prendiamo quindi $\rho = \dfrac{1}{16}$ e $r \leq \dfrac{\rho}{8} = \dfrac{1}{128}$

(c) Sappiamo che $F(g_1(u,v), g_2(u,v)) = (u,v)\ \forall\ (u,v) \in B_r(0,1)$ cioè che

$$\begin{cases} e^{\sin g_2} + \cos(g_1^2) - 2 = u \\ \frac{\cos g_1}{1+g_2^2} - e^{\frac{g_2}{2}} = v \end{cases}$$

Derivando la prima equazione rispetto a u e v otteniamo che:

$e^{\sin g_2}\cos g_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial u} - 2g_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial u} \sin(g_1^2) = 1$ e

$e^{\sin g_2}\cos g_2\,\dfrac{\partial g_2}{\partial v} - 2g_1\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\sin(g_1^2) = 0$
calcolando in $(u,v)=(0,1)$ e ricordando che $g_1(0,1)=g_2(0,1)=0$ abbiamo che $\dfrac{\partial g_2}{\partial u}(0,1)=1$ e $\dfrac{\partial g_2}{\partial v}(0,1)=0$. Derivando nuovamente in u e v le due relazioni precedenti si ottiene che

$$e^{\sin g_2}\left(\cos g_2\,\frac{\partial g_2}{\partial u}\right)^2 - \sin g_2\, e^{\sin g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial u}\right)^2 + e^{\sin g_2}\cos g_2\frac{\partial^2 g_2}{\partial\, u^2} - 2\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\right)^2\sin(g_1^2) +$$
$$-2g_1\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}\sin g_1^2 - 4\left(g_1\frac{\partial g_1}{\partial u}\right)^2\cos g_1^2 = 0$$
$$e^{\sin g_2}\cos^2 g_2\frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} - e^{\sin g_2}\sin g_2\frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} + e^{\sin g_2}\cos g_2\frac{\partial^2 g_2}{\partial u\partial v} - 2\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial v}\sin(g_1^2)$$
$$-2g_1\frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}\sin(g_1^2) - 4g_1^2\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial v}\cos(g_1^2) = 0$$
$$e^{\sin g_2}\left(\cos g_2\,\frac{\partial g_2}{\partial v}\right)^2 - \sin g_2\, e^{\sin g_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial v}\right)^2 + e^{\sin g_2}\cos g_2\frac{\partial^2 g_2}{\partial\, v^2} - 2\left(\frac{\partial g_1}{\partial v}\right)^2\sin(g_1^2) +$$
$$-2g_1\frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}\sin(g_1^2) - 4\left(g_1\frac{\partial g_1}{\partial v}\right)^2\cos g_1^2 = 0$$

da cui $\dfrac{\partial^2 g_2}{\partial u^2}(0,1)=-1,\ \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial u\partial v}(0,1)=0,\ \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial v^2}(0,1)=0.$
Quindi lo sviluppo al secondo ordine di g_2 è:
$g_2(u,v) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2+(v-1)^2)$

Esercizio 2 $F(x_1,x_2,y_1,y_2) = \left(y_2\sqrt{1+x_1^2} - y_2 + \sinh y_1 + \log(1+x_2),\ x_1 + 3y_2 e^{y_1} + y_2\arctan x_2\right)$

(a) F è una funzione di classe C^1 intorno al punto $(0,0,0,0)$ tale che $F(0,0,0,0) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} \cosh y_1 & \sqrt{1+x_1^2}-1 \\ 3y_2e^{y_1} & 3e^{y_1}+\arctan x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$ che è una matrice invertibile. Quindi per il teorema della funzione implicita $\exists\, r,\rho > 0$ e una funzione $g: B_r(0,0) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1 tale che $F(x_1,x_2,g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2)) = 0\ \forall\ x \in B_r(0,0)$.

(b) Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g.
Sia $T = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$
Dobbiamo imporre che
$\displaystyle\sup_{B_r(0,0)\times B_\rho(0,0)}\left\|Id - T\frac{\partial F}{\partial y}\right\| \le \frac{1}{2}$ e che $\displaystyle\sup_{B_r(0,0)}|F(x_1,x_2,0,0)| \le \frac{\rho}{2\|T\|}$. Per far questo è sufficiente prendere r e ρ in modo tale che
$\displaystyle\sup_{B_r(0,0)\times B_\rho(0,0)}\|1 - TJ_f(x,y)\|_\infty \le \frac{1}{4}$ e $\displaystyle\sup_{B_r(0,0)}|F(x_1,x_2,0,0)| \le \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \frac{\rho}{4}$.
$|F(x_1,x_2,0,0)| = |(\log(1+x_2),\ x_1)| = \sqrt{\log^2(1+x_2)+x_1^2} \le \sqrt{4r^2+r^2} = \sqrt{5}r \le 3r$
quindi per avere $\displaystyle\sup_{B_r(0,0)}|F(x_1,x_2,0,0)| \le \frac{\rho}{4}$ possiamo prendere $r \le \dfrac{\rho}{12}$

$$Id - T\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh y_1 & \sqrt{1+x_1^2}-1 \\ 3y_2e^{y_1} & 3e^{y_1}+\arctan x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\cosh y_1 & 1-\sqrt{1+x_1^2} \\ -y_2e^{y_1} & 1-e^{y_1}-\frac{1}{3}\arctan x_2 \end{pmatrix}$$
$$|1-\cosh y_1| = \left|1 - \frac{e^{y_1}+e^{-y_1}}{2}\right| = \left|\frac{2-e^{y_1}-e^{-y_1}}{2}\right| \le \frac{1}{2}|1-e^{y_1}| + \frac{1}{2}|1-e^{-y_1}|$$
$$\le \frac{3}{2}|y_1| + \frac{3}{2}|y_1| = 3|y_1| \le 3\rho$$

$$\left|1-\sqrt{1+x_1^2}\right| = \left|\left(1-\sqrt{1+x_1^2}\right)\frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{1+\sqrt{1+x_1^1}}\right| = \frac{x_1^2}{1+\sqrt{1+x_1^2}} \le x_1^2 \le r \le \frac{\rho}{12}$$

$|y_2 e^{y_1}| \le 3|y_2| \le 3\rho$

$$\left|1-e^{y_1}-\frac{1}{3}\arctan x_2\right| \le |1-e^{y_1}| + \frac{1}{3}|\arctan x| \le 3|y_1| + \frac{1}{3}|x| \le 3\rho + \frac{1}{3}r \le$$

$$\le 3\rho + \frac{1}{36}\rho = \frac{109}{36}\rho.$$

Dunque $\displaystyle\sup_{B_r(0,0)\times B_\rho(0,0)} \|Id - T\frac{\partial F}{\partial y}\|_\infty \le \frac{109}{36}\rho \le \frac{1}{4}$ se $\rho \le \frac{9}{109}$.

Prendiamo quindi $\rho = \frac{9}{109}$ e $r \le \frac{\rho}{12}$.

(c) Sappiamo che $F(x_1, x_2, g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = 0$ cioè che

$$\begin{cases} g_2\sqrt{1+x_1^2} - g_2 + \sinh g_1 + \log(1+x_2) = 0 \\ x_1 + 3g_2 e^{g_1} + g_2 \arctan x_2 = 0 \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione e deriviamola rispetto ad x_1 ed x_2

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\sqrt{1+x_1^2} + g_2\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\cosh g_1 = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\sqrt{1+x_1^2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\cosh g_1 + \frac{1}{1+x_2} = 0$$

calcolando in $(0,0)$ e tenendo conto del fatto che $g_1(0,0) = g_2(0,0) = 0$ otteniamo che $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0) = -1$

Derivando in x_1 e x_2 le due relazioni precedenti otteniamo che

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2}\sqrt{1+x_1^2} + 2\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + g_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}\right) - \frac{\partial^2 g_2}{\partial^2 x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial^2 x_1^2}\cosh g_1 +$$

$$+\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^2 \sinh g_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}\sqrt{1+x_1^2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}\cosh g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\sinh g_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2}\sqrt{1+x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2}\cosh g_1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)^2 \sinh g_1 - \frac{1}{(1+x_2)^2} = 0$$

calcolando in $(0,0)$ si ha $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 1$

Quindi $g_1(x_1, x_2) = -x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$

Esercizio 3 $F(x_1, x_2, y) = \dfrac{1}{1+x_1^2} - e^{x_2 y} + \log x_2 - \sin(\sin y) + x_2^3 - 1$

(a) F è una funzione di classe C^1 in un intorno di $(0,1,0)$ tale che $F(0,1,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0) = -x_2 e^{x_2 y} - \cos(\sin y)\cos y\big|_{(0,1,0)} = -2$ quindi per il teorema della funzione implicita $\exists\, r, \rho > 0$ e una funzione $g : B_r(0,1) \longrightarrow B_\rho(0)$ di classe C^1 tale che $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0 \;\forall\, x \in B_r(0,1)$.

(b) Stimiamo i raggi r e ρ imponendo che $\displaystyle\sup_{x\in B_r(0,1)} |F(x_1, x_2, 0)| \le \frac{\rho}{2\|T\|} = \rho$

(nel nostro caso $T = -\frac{1}{2}$) e $\displaystyle\sup_{B_r(0,1)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le \frac{1}{2}$

$$|F(x_1, x_2, 0)| = \left|\frac{1}{1+x_1^2} - 1 + \log x_2 + x_2^3 - 1\right| \le \left|\frac{1}{1+x_1^2} - 1\right| + |\log x_2| + |x_2^3 - 1|$$

$\leq \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2} + |\log(1+x_2-1)| + |x_2-1||x_2^2+x_2+1| \leq r^2 + 2|x_2-1| + 7|x_2-1|$
$\leq r + 2r + 7r \leq 10r$
Quindi $\displaystyle\sup_{x\in B_r(0,1)} |F(x_1,x_2,0)| \leq 10r \leq \rho$ se prendiamo $r \leq \dfrac{\rho}{10}$.
$\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - \dfrac{1}{2}x_2 e^{x_2 y} - \dfrac{1}{2}\cos(\sin y)\cos y| \leq \dfrac{1}{2}|1 - x_2 e^{x_2 y}| + \dfrac{1}{2}|1 - \cos(\sin y)\cos y|$
$\leq \dfrac{1}{2}|1 - x_2 + x_2 - x_2 e^{x_2 y}| + \dfrac{1}{2}|1 - \cos y + \cos y - \cos(\sin y)\cos y| \leq$
$\leq \dfrac{1}{2}|1-x_2| + \dfrac{1}{2}|x_2||1 - e^{x_2 y}| + \dfrac{1}{2}|1-\cos y| + \dfrac{1}{2}|\cos y||1 - \cos(\sin y)| \leq$
$\leq \dfrac{1}{2}r + 3|x_2 y| + \dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{1}{4}\sin^2 y \leq \dfrac{1}{2}r + 6\rho + \dfrac{1}{4}\rho + \dfrac{1}{4}\rho \leq \dfrac{1}{20}\rho + 6\rho + \dfrac{1}{2}\rho = \dfrac{131}{20}\rho$
Quindi $\displaystyle\sup_{B_r(0,1)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \dfrac{131}{20}\rho \leq \dfrac{1}{2}$ se prendiamo $\rho \leq \dfrac{10}{131}$.
Dunque sicuramente g è definita se $\rho = \dfrac{10}{131}$ e $r = \dfrac{1}{131}$

(c) Sappiamo che $\dfrac{1}{1+x_1^2} - e^{x_2 g} + \log x_2 - \sin(\sin g) + x_2^3 - 1 = 0$
Derivando in x_1 e x_2 otteniamo che
$\dfrac{-2x_1}{(1+x_1^2)^2} - x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_1}e^{x_2 g} - \cos(\sin g)\cos g\,\dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 0$
$-e^{x_2 g}\left(g + x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \dfrac{1}{x_2} - \cos(\sin g)\cos g\,\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + 3x_2^2 = 0$
da cui $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0,1) = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0,1) = 2$
Derivando di nuovo si ottiene che
$-2\dfrac{(1+x_1^2)^2 - 4x_1^2(1+x_1^2)^2}{(1+x_1^2)^4} - x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}e^{x_2 g} - \left(x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 e^{x_2 g} + \sin(\sin g)\left(\cos g\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2$
$+\cos(\sin g)\sin g\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 - \cos(\sin g)\cos g\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 0$
$-\dfrac{\partial g}{\partial x_1}e^{x_2 g} - x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}e^{x_2 g} - x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_1}e^{x_2 g}\left(g + x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \sin(\sin g)\cos g\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$
$+\cos(\sin g)\sin g\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\dfrac{\partial g}{\partial x_2} - \cos(\sin y)\cos g\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$
$-e^{x_2 g}\left(g + x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 - e^{x_2 g}\left(2\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right) - \dfrac{1}{x_2^2} + \sin(\sin g)\left(\cos g\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 +$
$+\cos(\sin g)\sin g\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 - \cos(\sin g)\cos g\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + 6x_2 = 0$
da cui $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,1) = -1,\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,1) = 0,\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,1) = -\dfrac{3}{2}$.
Quindi $g(x_1,x_2) = 2(x_2-1) - \dfrac{1}{2}x_1^2 - \dfrac{3}{4}(x_2-1)^2 + o(x_1^2 + (x_2-1)^2)$

Esercizio 4 $F(x,y) = 2y^6 - \sin^3 x$.
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ quindi non possiamo applicare il teorema della funzione implicita.
Tuttavia si ha che $2y^6 - \sin^3 x = 0 \Longleftrightarrow x = \arcsin(\sqrt[3]{2}\, y^2)$ quindi $\{F=0\}$ è, almeno in un intorno di $(0,0)$ il grafico di una funzione di classe C^1.