Esercizio 1

Un anello di ferro, di sezione S=5 cm^2, ha un piccolo intraferro di spessore δ=4 mm e la circonferenza media dell'anello (compreso l'intraferro) è $2\pi r_0$=40 cm; intorno all'anello sono avvolte N=500 spire percorse da una corrente di intensità i e nell'anello il campo magnetico è **B**=1 T. Si calcoli i, l'intensità del vettore **H** e la magnetizzazione **M** all'interno del ferro usando il valore χ_m=5400.

SOLUZIONE

Per il teorema di Ampère si ha $\oint \vec{H} \cdot \vec{u}_T dS = (2\pi r_0 - \delta)H_{Fe} + \delta H_a = Ni$. La componente di **B** perpendicolare alla superficie di separazione tra due materiali diversi è continua nel passaggio da un materiale all'altro, quindi **B** ha lo stesso valore nel ferro e nell'aria dell'intraferro, di conseguenza è $\mu_{Fe}H_{Fe} = \mu_0 H_a$. Si ricava

$$i = \left[\frac{(2\pi r_0 - \delta)}{(\chi_m + 1)} + \delta \right] \cdot \frac{B}{N\mu_0} = 6.5\ \mathrm{A}$$

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_{Fe}} = 147\ \mathrm{A/m}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.96 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m}$$

Esercizio 2

Una sbarra di volume V=500 cm^3 è magnetizzata uniformemente, possiede un momento magnetico μ =200 Am^2 ed il campo **B** al suo interno vale 0.1 T. Si calcoli:
a) l'intensità del campo magnetico **H** all'interno della sbarra;
b) il valore massimo M_{max} del momento delle forze risentite dalla sbarra se posta in un campo magnetico esterno uniforme $\mathbf{B}_e$= 1 T.

SOLUZIONE

a) Il vettore **M** è il momento magnetico per unità di volume, di conseguenza il suo modulo risulta M=μ / V= 4 10^5 A/m. I vettori magnetici **B**, **H** ed **M** sono legati dalla relazione **B**=μ_0(**H** + **M**), poichè **H** ed **M** sono paralleli, si ricava: $H = \left| \frac{B}{\mu_0} - M \right| = 3.2 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m}$.

b) Sotto l'azione del campo magnetico esterno la sbarra magnetizzata risente delle forze di momento risultante **M** = μ ^ $\mathbf{B_e}$: il valore massimo del modulo del momento meccanico è $M_{max}=\mu\, B_e$=200 Nm.

Esercizio3

Due anelli toroidali eguali sono formati dallo stesso materiale ferromagnetico magnetizzato uniformemente; la lunghezza media è d=20 cm. Il primo anello C è continuo, il secondo anello D ha un interferro di spessore h=5mm. Il campo magnetico nel primo anello è B_C=0.314 T. Calcolare il campo H_C nel primo anello e quanto valgono nel secondo anello il campo magnetico B_D, il campo H_D nell'interferro e il campo H_D nel ferro.

SOLUZIONE

Per ciò che riguarda il primo anello si ha che $B_C=\mu_0 M$.
e quindi il vettore magnetizzazione M assume il seguente valore : $M=2.5\cdot 10^5$ A/m. Mentre il vettore H_C è nullo.
Per ciò che riguarda il secondo anello si avrà che

$$B_D d=\mu_0\, i_m=\mu_0\, M\,(d-h) \quad \text{e quindi} \quad B_D=\mu_0\, M\,(1-h/d)=0.306\ \text{T}$$

A questo punto il vettore H nell'intraferro dell'anello D varrà $H_0=B_D/\mu_0=2.44\cdot 10^5$ A/m, mentre all'interno del ferro
$H_D=-H_0 h/(d-h)=-6.26\cdot 10^3$ A/m.

Esercizio 4

Un avvolgimento di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da $N = 100$ spire; i raggi interno ed esterno sono rispettivamente $r_1 = 5$cm e $r_2 = 6$cm e la larghezza del toroide è $a = 1$cm.
Calcolare l'induttanza del toroide e l'energia magnetica in esso immagazzinata nell'ipotesi che nel circuito scorra una corrente $I = 5$A.

Soluzione:
Il campo magnetico all'interno dell'avvolgimento forma delle linee di forza circolari e il suo modulo, che per ragioni di simmetria dipende solo dalla distanza r dall'asse del toroide, si può calcolare tramite il teorema di Ampère e risulta essere

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Conseguentemente il flusso magnetico attraverso la sezione del toroide vale

$$\Phi_B = \int_{\text{sezione}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = a \int_{r_1}^{r_2} B(r) dr = a \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Essendo il flusso Φ_B concatenato a N spire, l'induttanza è dunque

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \approx 3.65\,\mu\text{H} ,$$

mentre l'energia magnetica è

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \approx 4.56 \times 10^{-5}\ \text{J}.$$

Si può verificare che l'energia magnetica avrebbe potuto essere calcolata anche integrando la densità di energia all'interno del toroide, ottenendo il medesimo risultato

$$W = \int_{\text{volume}} w dV = \int_{\text{volume}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} B^2(r) a 2\pi r dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 5

Si consideri un cavo coassiale costituito da due superfici cilindriche di raggi r_1 e $r_2 > r_1$, percorse da correnti (uniformemente distribuite) di intensità I. Determinare l'energia magnetica immagazzinata (per unità di lunghezza) e l'induttanza (per unità di lunghezza) di tale cavo.

Soluzione:
Per ragioni di simmetria il campo magnetico forma linee di forza circolari centrate sull'asse del cavo e il suo modulo dipende solo dalla distanza da tale asse. Utilizzando il teorema di Ampère si dimostra che il campo magnetico è presente solo nella regione compresa tra i due conduttori e ha modulo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

dove r indica appunto la distanza dall'asse.
La densità di energia magnetica è quindi anch'essa funzione della distanza dall'asse e vale

$$w(r) = \frac{1}{2}\frac{B^2(r)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Per l'energia immagazzinata in un tratto di lunghezza l avremo pertanto

$$W = \int_{\text{volume}} w dV = \int_{r_1}^{r_2} w(r) l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

L'induttanza può poi essere calcolata facilmente osservando che

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Si vede facilmente che entrambe le grandezze calcolate su un generico tratto di cavo dipendono (linearmente) solo dalla lunghezza l del tratto e non dalla posizione assoluta di questo. Ha quindi senso definire le densità di energia magnetica e induttanza per unità di lunghezza nel seguente modo naturale

$$\mathrm{W} = \frac{W}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\mathrm{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 5

Esercizio 8.3

Una bobina di N spire è avvolta attorno ad un lungo solenoide di sezione circolare di raggio R, avente n spire per unità di lunghezza.
Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra bobina e solenoide.

Soluzione:
Detta I la corrente nel solenoide, il campo al suo interno ha modulo $B = \mu_0 n I$. Il flusso concatenato con la bobina è quindi

$$\Phi_B = NB\pi R^2 = N\mu_0 n I \pi R^2,$$

per cui il coefficiente di mutua induzione risulta essere

$$M = \frac{\Phi_B}{I} = N\mu_0 n \pi R^2 .$$