Soluzioni del tutorato di Statistica 1 del 11/03/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.

1. $X_1, ...X_n$ sono variabili casuali iid $\sim \Gamma(r, \lambda)$. Per prima cosa è utile calcolarsi la fgm di X:
$E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{e^{-x(\lambda-t)}x^{r-1}}{\Gamma(r)} dx = (\frac{\lambda}{\lambda-t})^r$
Sia $Y = X_1 + ... + X_n$, la fgm di Y è:
$E[e^{tY}] = E[e^{t(x_1+...+X_n)}] = E[e^{tX_1} \cdot ... e^{tX_n}] = E[e^{tX_1}] \cdot ... E[e^{tX_n}] = E[e^t X]^n = (\frac{\lambda}{\lambda-t})^{nr}$
Allora $Y \sim \Gamma(nr, \lambda)$

2. $X_1, ..., X_n$ sono variabili casuali indipendenti, $X_i \sim \Gamma(r_i, \lambda)$. Usando sempre la fgm si ricava che $Y = X_1 + ... + X_n \sim \Gamma(\sum_{i=1}^n r_i, \lambda)$

Esercizio 2.
Siano $X_1, ...X_n$ variabili casuali con distribuzione Gamma di parametri k e $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. La distribuzione di $\bar{X}$ si calcola usando la fgm:
$E[e^{t\bar{X}}] = E[e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1} nX_i}] = E[e^{\frac{t}{n}X_1} \cdot ... e^{\frac{t}{n}X_n}] = E[e^{\frac{t}{n}X_1}] \cdot ... E[e^{\frac{t}{n}X_n}] = (\frac{\lambda}{\lambda-t})^{kn} = (\frac{1}{1-\frac{2t}{n}})$ Allora $\bar{X} \sim \Gamma(nk, \frac{n}{2})$

2. $E[\bar{X}] = \mu = \frac{kn}{\lambda} = 2k$
$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4k}{n}$

Esercizio 3.
$X_1, ..., X_n$ variabili casuali $\sim N(0, 1)$

1. Sia $Y = X_1^2$, usando la fgm si ricava che $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim \chi_1^2$, quindi per quanto ricavato dall'esercizio 1. $U \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \sim \chi_n^2$

2. $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

3. $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

Esercizio 4.
$X_1, ..., X_n$ variabili casuali estratte da $N(\mu, \sigma^2)$

1. Usando i risultati del teorema 4.10, si ottiene che $X_1 + X_2$ e $X_2 - X_1$ sono entrambe distribuite secondo una Normale di media 0 e varianza 2.

2. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

3. $U \sim \chi_n^2$