Tutorato di Statistica 1 del 20/05/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Sia $X_1, ..., X_n$ un c.c. dalla distribuzione $N(\mu, 25)$. Si vuole testare il seguente sistema di ipotesi: $H_0 : \mu = 10$ contro $H_1 : \mu = 5$
Il test più potente è quello di Neyman-Pearson:

$$\lambda(x_1, .., x_n) = \frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \leq k$$

$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}}{\prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} = \frac{e^{-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2}} \leq k$ da cui passango ai log si ricava che:

$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 \geq 50logk$

$n\mu_0^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^n x_i - n\mu_1^2 + 2\mu_1 \sum_{i=1}^n x_1 \geq k_1$

$(-2\mu_0 + 2\mu_1) \sum_{i=1}^n x_i \geq k_1 + n\mu_1^2 - n\mu_0^2$

$\sum_{i=1}^n \leq k_2$ quindi $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq k^*$

quindi la regione critica è : $C^* = \{(x_1, ..., x_n) : \bar{X} \leq K^*\}$

Ampiezza del test di I tipo:
$0.025 = \alpha = P(\bar{X} \leq k^*|\mu_0) = P(\frac{\bar{X}-\mu_0}{5/\sqrt{n}} \leq \frac{k^*-\mu_0}{5/\sqrt{n}}|\mu_0) = \Phi\left(\frac{k^*-\mu_0}{5/\sqrt{n}}\right)$ quindi
$\frac{k^*-\mu_0}{5/\sqrt{n}} = z_{0.025} = -z_{0.975} = -1.96$ da cui $k^* = 10 - \frac{9.8}{\sqrt{n}}$

Ampiezza del test di II tipo:
$0.025 = \alpha = P(\bar{X} > k^*|\mu_1) = P(\frac{\bar{X}-\mu_1}{5/\sqrt{n}} > \frac{k^*-\mu_1}{5/\sqrt{n}}|\mu_1) = 1 - \Phi\left(\frac{k^*-\mu_1}{5/\sqrt{n}}\right)$ quindi
$\frac{k^*-\mu_1}{5/\sqrt{n}} = z_{0.975} = 1.96$ da cui $k^* = 5 + \frac{9.8}{\sqrt{n}}$
$10 - \frac{9.8}{\sqrt{n}} = 5 + \frac{9.8}{\sqrt{n}}$ allora $n = 16$ allora la regione critica é:
$C^* = \{(x_1, .., x_n) : \bar{X} \leq 7.5\}$

Esercizio 2.
$X_1, ..., X_n$ un c.c. da $N(\mu, 5)$ e $n = 20$. Vogliamo testare $H_0 : \mu_0 = 7$ contro $H_1 : \mu_1 > 7$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{1}{10}(x-\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{10}} e^{-\frac{x^2}{10}} e^{\frac{\mu x}{5}}$
la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale allora applichiamo il teorema 9.5 del libro
$c(\mu) = \frac{\mu}{5}$ e $d(x) = x$
la statistica da usare è $T = \sum_{i=1}^n x_i$ e poichè la funzione $c(\mu)$ è monotona crescente la regione critica sarà:
$C = \{(x_1, ..., x_n) | T > k\}$ con k t.c. l'errore di I specie sia pari ad α
$0.05 = \alpha = P(\sum_{i=1}^n x_i > k | \mu_0) = P(\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \mu_0}{\sqrt{5n}} > \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{5n}} | \mu_0) = \Phi\left(\frac{k-n\mu_0}{\sqrt{5n}}\right)$
da cui
$\frac{k-n\mu_0}{\sqrt{5n}} = z_{1-\alpha} = 1.65$ quindi $k = n\mu_0 + 1.65\sqrt{5n} = 156.5$
Quindi il test uniformemente più potente di livello α è dato dalla regione critica: $C = \{(x_1, ..., x_n) | \bar{X} > 7.825\}$
La funzione di potenza è:
$\Pi_Y(\mu) = P(rifiutareH_0 | \mu) = P(\bar{X} > 7.825 | \mu) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{7.825-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = \Phi\left(\frac{7.825-\mu}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right)$
allora
$\Pi(7.5) = \Phi\left(\frac{7.825-7.5}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right) = 0.2578$
$\Pi(8) = \Phi\left(\frac{7.825-8}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right) = 0.6368$
$\Pi(8.5) = \Phi\left(\frac{7.825-8.5}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right) = 0.9115$
$\Pi(9) = \Phi\left(\frac{7.825-9}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right) = 0.9906$

Esercizio 3.
Sia X una singola osservazione dalla densità:

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x)$$

, $\theta > 0$
la funzione di potenza é:

$\Pi_Y(\theta) = P(X \geq \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x) dx = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\theta$

applichiamo il lemma di Neyman-pearson

$\lambda(X_1) = \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1 x^{\theta_1 - 1}} = 2x \leq k^{'}$

da cui $x \leq k^*$
la regione critica è quindi $C^* = \{x : x \leq k^*\}$

l'ampiezza del test è:
$\alpha = P(rifiutare H_0|H_0) = P(X \leq k^*) = \int_0^{k^*} \theta x^{\theta-1} = (k^*)^\theta$ quindi $k^* = \sqrt{\alpha}$