Tutorato di Statistica 1 del 28/04/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
$X_1, ..., X_n$ c.c. da una $N(\mu, 25)$. Applichiamo il metodo pivotale per trovare un intervallo di confidenza per μ al 90%.
$P(q_1 < Q < q_2) = 0.90$; $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ quindi pivotale.
$P(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = \Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 0.90$
$\Phi(q_1) = 0.05$ e $\Phi(q_2) = 0.95$. Poichè la normale è simmetrica $q_1 = -q_2$.
$\Phi(q_2) = 0.95$ da cui $q_2 = 1.65$
$P(-1.65 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.65) = 0.90$ da cui si ricava che l'intervallo per μ è dato da:
$P(\bar{X} - \frac{1.65 \cdot 5}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.65 \cdot 5}{\sqrt{n}}) = 0.90$.
La lunghezza dell'intervallo è quindi:
$(\bar{X} + \frac{8.25}{\sqrt{n}} - \bar{X} + \frac{8.25}{\sqrt{n}}) < 1$ quindi $\frac{16.5}{\sqrt{n}} < 1$ da cui $n > 272.25$

Esercizio 2.
Bisogna trovare un intervallo di confidenza al 90% per la media di una distribuzione normale con $\sigma = 3$ dato il campione $(3.3, 0.3, 0.6, 0.9)$.
Sia $\bar{X}$ la media campionaria.
$\bar{X} = \frac{1}{4}(3.3 + 0.3 + 0.6 + 0.9) = 1.275$
$P(a < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b) = \Phi(b) - \Phi(a) = 0.90$
$\Phi(b) = 0.95$ allora $b = 1.65$ e poichè la normale è simmetrica $a = -b = -1.65$
Allora: $P(\bar{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = P(1.275 - \frac{3}{2} \cdot 1.65 < \mu < 1.275 + 1.65 \cdot \frac{3}{2}) =$
$P(1.1925 < \mu < 3.74) = 0.90$

Esercizio 3.
Sia X la variabile aleatoria che individua i carichi di rottura. $X = (6.60, 4.60, 5.40, 5.80, 5.50)$.
Dobbiamo stimare μ al 95% assumendo che $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
La quantità pivotale è $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
dove $\bar{X}$ è la media campionaria e S^2 la varianza campionaria.
$\bar{X} = \frac{1}{5}(6.60 + 4.60 + 5.40 + 5.80 + 5.50) = 5.58$
$S^2 = 1/4 \sum_1^5 (X_i - \bar{X})^2 = 0.522$
$P(q_1 < Q < q_2) = P(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < q_2) = 0.95$
q_1 e q_2 sono i quantili della t di Student con 4 gradi di libertà, e dalle tavole si ricava che $q_2 = 2.776$ e $q_1 = -q_2$. L'intervallo per μ è: $P(\bar{X} - q_2\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + q_2\frac{S}{\sqrt{n}}) =$
$P(4.69 < \mu < 6.47) = 0.95$
L'intervallo di confidenza per σ^2 si trova considerando come quantità pivotale: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
$P(q_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_2) = 0.90$
Dalle tavole si ricava che per una χ^2_4, $q_2 = 9.49$ e $q_1 = 0.711$
$P(\frac{4S^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{4S^2}{q_1}) = P(1.24 < \sigma^2 < 16.61) = 0.90$
Per trovare l'intervallo di confidenza all'81% per μ e σ^2 si procede nel seguente

modo:
$P(-q_2 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2, q^{'} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q^{''}) = \gamma_1\gamma_2 = 81\%$
Dal punto precedente $\gamma_2 = 0.9$ quindi $\gamma_1 = 0.9$
Per l'indipendenza:
$P(-q_2 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2)P(q^{'} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q^{''}) = 81\%$
quindi: $P(-q_2 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = 2\Phi(q_2) - 1 = 0.9$ da cui $q_2 = 1.65$.
Per l'altra espressione invece dalle tavole della χ^2_4 si ricava che $q^{'} = 0.711$ e $q^{''} = 9.49$.

Esercizio 4.
Per la soluzione vedere l'esercizio 1 del tutorato 7 A.A. 2007