Tutorato di Statistica 1 del 06/05/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Sia X una v.c. con densità:

$$f(x,\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} 1_{(0,\theta)}(x)$$

$F(x) = \int_0^x \frac{2(\theta-x')}{\theta^2} 1_{(0,\theta)}(x')dx'$ se $x < \theta$
$= \int_0^x \frac{2(\theta-x')}{\theta^2} dx' = \frac{2x}{\theta} - \frac{x^2}{\theta^2}$
$Q = \frac{X}{\theta}$ è pivotale se la sua distribuzione non dipende da θ
$f_Q(q) = \theta(\frac{2}{\theta} - \frac{2q}{\theta})1_{(0,1)}(q) = 2(1-q)1_{(0,1)}(q)$ quindi Q pivotale.
$0.9 = P(q_1 < Q < q_2) = P(q_1 < \frac{X}{\theta} < q_2)$ da cui
$P(Q < q_1) = 0.05$ e $P(Q > q_2) = 0.05$
Adesso:

$2\int_0^{q_1}(1-q)dq = 0.05$ da cui si ricava che $q_1 = 0.025$

Inoltre $2\int_{q_2}^1(1-q)dq = 0.05$ e risolvendo si ha $q_2 = 0.776$

Esercizio 2.
$X_1, ..., X_n$ c.c. da

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} 1_{(0,+\infty)}$$

$\alpha = P(q_1 < Q < q_2)$ dove Q quantità pivotale.
Sappiamo che se $\forall i, X_i \sim exp(\theta)$ allora $\sum_{i=1}^n x_i \sim \Gamma(n,\theta)$ la rendiamo pivotale: $Q = 2\theta \sum_{i=1}^n x_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) \sim \chi^2_{2n}$ allora
$P(q_1 < 2\theta\sum_{i=1}^n x_i < q_2) = \alpha$ quindi q_1 e q_2 sono rispettivamente i quantili t.c. $q_1 = \chi^2_{(\frac{1-\alpha}{2},n)}$ e $q_2 = \chi^2_{(\frac{1-\alpha}{2},n)}$

Esercizio 3.
Sia e l'errore dunque $e \sim N(0, 10^{-4})$ e se P è il peso, $P \sim N(\theta, 10^{-4})$.
$P(q_1 < Q < q_2) = 0.95$ Sia $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ la quantità pivotale $Q \sim N(0,1)$ dove $\bar{X}$ è la media campionaria e risulta:
$\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_i^5 x_i = 3.15$
$0.95 = P(q_1 < \frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{5}}) = 2\Phi(q_2) - 1$ da cui $q_2 = 1.96$ e $q_1 = -q_2$ per simmetria allora l'intervallo per θ è: $0.95 = P(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
$= (3.14 < \mu < 3.15)$
in maniera analoga $0.99 = P(q_1 < Q < q_2) = P(q_1 < \frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = 2\Phi(q_2) - 1$ da cui $q_2 = 2.58$ e $q_1 = -q_2$
$0.99 = P(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = P(3.13 < \theta < 3.16)$

Esercizio 4.

Sia $x_1, ..., x_8$ c.c. raccolto tipo A

Sia $y_1, ..., y_8$ c.c. raccolto tipo B

Qualità A: $86, 87, 56, 93, 84, 93, 75, 79$

Qualità B: $80, 79, 58, 91, 77, 82, 74, 66$

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma^2)$

Siano $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ le rispettive medie campionarie

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{8}\sigma^2)$

$\bar{X} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 81.625$

$\bar{Y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = 75.875$

Q quantità pivotale è: $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{(\frac{1}{8}+\frac{1}{8})S_p^2}} \sim t_{(8+8-2)}$ gradi li libertà

dove S_p^2 è lo stimatore non distorto della varianza comune σ^2

$S_p^2 := \frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{m+n-2}$ allora $S_p^2 = \frac{7S_x^2+7S_y^2}{14}$

$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{x=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ e $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{y=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$

$0.95 = P(q_1 < Q < q_2)$ dove q_2 è il quantile di livello $(1+\gamma)/2$ di una distribuzione t di Student con 14 gradi di libertà.

$0.95 = P(-t_{0.975}(14) < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{4}S_p^2}} < t_{0.975}(14)) =$

$= P(-t_{0.975}(14) < \frac{5.75-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{4}S_p^2}} < t_{0.975}(14))$

dalle tavole si ricava che $t_{0.975}(14) = 2.145$ allora l'intervallo per $\mu_x - \mu_y$ al 95% è:

$(5.75 - 2.145\sqrt{\frac{1}{4}S_p^2}; 5.75 + 2.145\sqrt{\frac{1}{4}S_p^2})$