AM120 2010-2011: II ESONERO

TEMA 1. Sia $I \subset \mathbf{R}$ insieme aperto.

Dare la definizione di funzione analitica in I.

Indicare perché una funzione analitica in I é necessariamente $C^\infty(I)$.

Mostrare con un esempio che non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I.

Mostrare poi che se $f \in C^\infty((a,b))$ ed esistono $M,\ r > 0$ tali che

$$\sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \ \leq\ \frac{Mn!}{r^n} \qquad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b).

TEMA 2. Definire la funzione $exp(z), \quad z \in \mathbf{C}$.

Provare poi che

$$exp(z+w) = (exp\, z)(exp\, w)$$

TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non negativa.

Dire cosa vuol dire che f é integrabile e che cosa é l'integrale di f.

Provare poi che se f é continua ed é nulla fuori di un intervallo allora f é integrabile.

TEMA 4. Enunciare e dimostrare il Teorema della media.

TEMA 5. Sia $f \in C([a,+\infty))$ integrabile.

Provare che

$$\int_x^{+\infty} |f| \to_{x\to+\infty} 0$$

e dedurre che $\int_a^{\infty} |f| = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x |f|$.

ESERCIZIO 1. Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \cos^2 x, \qquad g_2(x) = x\cosh x \qquad g_3(x) = \frac{x-2}{x(x^2+1)}, \qquad g_4(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Calcolare quindi i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{3\pi} \cos^2 x dx, \qquad I_2 = \int_{-1}^{2} x\cosh x dx \qquad I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x(x^2+1)} dx$$

$$I_4' = \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}] dx$$

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$I_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cos^2 x dx, \qquad I_2' = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} \qquad I_3' = \int_1^{+\infty} \frac{x-2}{x(x^2+1)} dx$$

ESERCIZIO 3. Sia t un parametro reale. Dire, motivando, per quali valori del parametro t i seguenti integrali esistono

$$I_1' = \int_{\mathbf{R}} \frac{\arctan(\sin x) + \arctan(\frac{1}{\sin x})}{t^2+x^2} dx, \qquad I_2' = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x-t)^4} dx, \qquad = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

Calcolare, per i valori di t trovati, tali integrali.

ESERCIZIO 4. Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(0, +\infty)$:

$$k(x) = \sin x^2, \qquad h(x) = \frac{\arcsin(\cos x)}{1+x}$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti formule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n e^{-n^2x^2} dx = \int_0^1 \left[\lim_{n\to+\infty} n e^{-n^2x^2}\right] dx$$

$$\int_{-4}^{4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n\right] dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4(2n+1)}$$