AM120 2010-2011: II ESONERO

TEMA 1. Sia f la somma di una serie di potenze convergente in $(-r, r)$.

Provare che f é analitica in $(-r, r)$.

TEMA 2. Enunciare e dimostrare le formule di Eulero.

TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non negativa.

Definire l'integrale superiore e l'integrale inferiore di f.

Dire poi cosa vuol dire che f é integrabile e definire quindi l'integrale di f.

Provare infine che se f, g sono non negative ed integrabili allora lo é anche $f + g$ e

$$\int_{\mathbf{R}} (f+g) = \int_{\mathbf{R}} f + \int_{\mathbf{R}} g$$

La proprietá indicata vale anche per l'integrale inferiore/superiore?

TEMA 4. Enunciare e dimostrare la proprietá di additivitá dell'integrale.

Dare la definizione di integrale orientato $\int_a^b f$ e mostrare l'identitá

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 \qquad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

TEMA 5. Sia $f \in C(\mathbf{R})$.

Provare che f ammette primitiva e che, se P é una primitiva di f, allora

$$\int_a^b f = P(b) - P(a)$$

per ogni $a, b \in \mathbf{R}$.

Tale formula continua a valere anche se $b = +\infty$?

ESERCIZIO 1. Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \sin^2 x, \qquad g_2(x) = x \sinh x \qquad g_3(x) = \frac{x-2}{x(x^2-1)}, \qquad g_4(x) = 2x^2 e^{-x^2}$$

Calcolare quindi i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2 x dx, \qquad I_2 = \int_{-1}^{2} x \sinh x dx \qquad I_3 = \int_2^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx,$$

$$I_4' = \int_{-\infty}^{+\infty} [2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}] dx$$

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$I_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin^2 x dx, \qquad I_2' = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2 x} \qquad I_3' = \int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx$$

ESERCIZIO 3. Sia t un parametro reale. Dire, motivando, per quali valori del parametro t i seguenti integrali esistono

$$I_1' = \int_{\mathbf{R}} \frac{\arctan x}{t^2 + x^2} dx, \qquad I_2' = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(t+x)^4} dx, \qquad I_3' = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx$$

Calcolare, per i valori di t trovati, tali integrali.

ESERCIZIO 4. Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(0, +\infty)$:

$$k(x) = \sin(e^x), \qquad h(x) = \frac{\arctan(\sin x) + \arctan(\frac{1}{\sin x})}{1+x}$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti formule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^4x^4} dx = \int_0^1 \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^4x^4} \right] dx$$

$$\int_0^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n}} x^n \right] dx = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$