

AM120 2010-2011: II ESONERO

TEMA 1. Sia f la somma di una serie di potenze convergente in $(-r, r)$.

Provare che f é analitica in $(-r, r)$.

TEMA 2. Definire la funzione $\exp(z)$, $z \in \mathbf{C}$.

Provare poi che

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ non negativa.

Definire l'integrale superiore e l'integrale inferiore di f .

Dire poi cosa vuol dire che f é integrabile e definire quindi l'integrale di f .

Provare infine che se f, g sono non negative ed integrabili allora lo é anche $f + g$
e

$$\int_{\mathbf{R}} (f + g) = \int_{\mathbf{R}} f + \int_{\mathbf{R}} g$$

La proprietá indicata vale anche per l'integrale inferiore/superiore?

TEMA 4.

Enunciare e dimostrare il Teorema della media.

TEMA 5. Sia $f \in C(\mathbf{R})$.

Provare che f ammette primitiva e che, se P é una primitiva di f , allora

$$\int_a^b f = P(b) - P(a)$$

per ogni $a, b \in \mathbf{R}$.

Tale formula continua a valere anche se $b = +\infty$?

ESERCIZIO 1. Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \cos^2 x, \quad g_2(x) = x \cosh x \quad g_3(x) = \frac{x-2}{x(x^2+1)}, \quad g_4(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Calcolare quindi i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{3\pi} \cos^2 x dx, \quad I_2 = \int_{-1}^2 x \cosh x dx \quad I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x(x^2+1)} dx$$

$$I'_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}] dx$$

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$I'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin^2 x dx, \quad I'_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2 x} \quad I'_3 = \int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx$$

ESERCIZIO 3. Sia t un parametro reale. Dire, motivando, per quali valori del parametro t i seguenti integrali esistono

$$I'_1 = \int_{\mathbf{R}} \frac{\arctan(\sin x) + \arctan(\frac{1}{\sin x})}{t^2 + x^2} dx, \quad I'_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x-t)^4} dx, \quad = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

Calcolare, per i valori di t trovati, tali integrali.

ESERCIZIO 4. Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(0, +\infty)$:

$$k(x) = \sin(e^x), \quad h(x) = \frac{\arctan(\sin x) + \arctan(\frac{1}{\sin x})}{1+x}$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti formule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n e^{-n^2 x^2} dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n^2 x^2} \right] dx$$

$$\int_{-4}^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n \right] dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 (2n+1)}$$